3.1. POSICIÓN, DESPLAZAMIENTO Y DISTANCIA RECORRIDA

Página 43

1. ¿Qué trayectoria describe un cuerpo cuando cae hacia el suelo?

El cuerpo, cuando cae, describe una trayectoria rectilínea. Se desplaza en línea recta, desde la posición inicial, hasta que llega al suelo.

Se puede comentar a los estudiantes que esto es así porque el cuerpo es atraído por la Tierra, hacia su centro, es decir, en una trayectoria radial y, por tanto, perpendicular a la superficie de la Tierra.

2. Cita tres movimientos, al menos, en los que la trayectoria sea circular.

— El movimiento de los neumáticos en un coche.

— El movimiento del tambor de la lavadora.

— El movimiento que describe un niño o una niña al columpiarse.

3. ¿Qué desplazamiento realizas al rodear por completo una mesa. ¿Qué distancia recorres al hacerlo?

El desplazamiento que realizamos es nulo, pues al final nos encontramos en el punto de partida. Nuestra posición no varía respecto a la posición de salida. Un corredor de maratón, que llega al mismo punto en el estadio del que partió, tampoco se desplaza. Sin embargo, en el primer caso, la distancia recorrida es el perímetro de la mesa y en el segundo, ¡más de 42 kilómetros!

3.3. VELOCIDAD Y GRÁFICOS POSICIÓN-TIEMPO

Página 47

1. ¿Cómo es el movimiento de caída de un cuerpo? Dibuja el gráfico posición-tiempo que corresponde a este tipo de movimiento.

Es un movimiento vertical hacia la superficie de la Tierra, en el que la velocidad es variable y la aceleración constante.

Al representar la posición de un objeto que se mueve con caída libre en un gráfico posición-tiempo obtenemos una parábola.

2. Diseña una experiencia que permita estudiar el movimiento de caída de un cuerpo.

Para "aminorar" la aceleración de caída, podemos utilizar, al igual que hizo Galileo, un plano inclinado por el que podemos dejar que se deslice o que ruede un objeto. De ese modo, se consigue que, en cada instante, la velocidad con que se desplaza el objeto sobre el plano sea menor que la velocidad de caída vertical, lo que permite medir el tiempo con precisión.

3. ¿Cómo podríamos aminorar la velocidad con que cae un objeto dejado en libertad?

Para conseguirlo, podemos utilizar el plano inclinado al que nos hemos referido en la cuestión anterior. El proceso a seguir puede ser el siguiente:

- En el plano medimos distancias iguales y las señalamos con alguna marca (cinta aislante).
- Dejamos rodar una bola por el plano inclinado y medimos el tiempo que tarda en recorrer la distancia que separa dos marcas.
- Con esa información, podemos obtener la velocidad media con que se mueve la bola en ese tramo.
- Una vez conocida la velocidad media en cada intervalo y el tiempo que tarda en recorrerlo, estamos en condiciones de calcular la aceleración media del movimiento. Para ello, basta con aplicar las expresiones analíticas que hemos visto en el texto.

El resultado de la experiencia es el siguiente:

- La velocidad varía regularmente en cada tramo, aumentando a medida que nos alejamos del punto del que se deja caer el objeto.
- La aceleración se mantiene constante en todos los tramos. El movimiento es un m.r.u.a.

4. Cita tres movimientos en los que la velocidad varíe. ¿En alguno de esos movimientos cambia la velocidad de modo regular?

— El instante en que un ciclista arranca en una contrarreloj.

— El movimiento de una piedra que cae por la ladera de una montaña.

— El despegue de una nave espacial.

Lo más probable es que en ninguno de ellos varíe la velocidad de modo regular, ya que se trata de movimientos reales, en los que intervienen múltiples factores. El movimiento uniforme y el uniformemente acelerado son dos modelos de comprensión de la realidad que, en sentido estricto, se dan muy pocas veces, aunque es posible aproximar la realidad a estos modelos en muchas ocasiones.

Esta es una buena ocasión para hacer reflexionar a los estudiantes sobre el significado que tiene en física la idea de “modelo” y lo útil que resulta dicho concepto, a pesar de que el modelo es, generalmente, mucho más simple que la realidad que intenta explicar. Se puede proponer a los estudiantes que analicen la lectura de Feynman que se sugiere en la página 24 del texto del alumno, para ayudarles a comprender lo que decimos.

3.4. DISTANCIA RECORRIDA Y GRÁFICOS VELOCIDAD-TIEMPO

Página 49

1. Calcula la velocidad y su módulo para un cuerpo que se mueve según la expresión:

$$\vec{r} = t \cdot \vec{i} + 2 \cdot t \cdot \vec{j} - \frac{t^2}{2} \cdot \vec{k}$$

en la que la posición se mide en metros, si el tiempo se mide en segundos.

Para obtener la velocidad instantánea, calculamos la velocidad media entre dos instantes muy próximos, t y $t + \Delta t$:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)\cdot\vec{i} + 2\cdot(t+\Delta t)\cdot\vec{j} - [(t+\Delta t)^2/2]\cdot\vec{k} - (t\cdot\vec{i} + 2\cdot t\cdot\vec{j} - t^2/2\cdot\vec{k})}{\Delta t} =$$

$$= \frac{t\cdot\vec{i} + \Delta t\cdot\vec{i} + 2\cdot t\cdot\vec{j} + 2\cdot\Delta t\cdot\vec{j} - t^2/2\cdot\vec{k} - 2\cdot t\cdot\Delta t/2\cdot\vec{k} - (\Delta t)^2/2\cdot\vec{k} - t\cdot\vec{i} - 2\cdot t\cdot\vec{j} + t^2/2\cdot\vec{k}}{\Delta t} =$$

$$= \vec{i} + 2\cdot\vec{j} - t\cdot\vec{k} - \frac{\Delta t}{2}\cdot\vec{k}$$

Como Δt tiende a cero, el vector que proporciona la velocidad instantánea es:

$$\vec{v} = \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - t \cdot \vec{k}$$

El módulo de la velocidad será, por tanto:

$$v = \sqrt{1 + 4 + t^2} = \sqrt{5 + t^2}$$

y se expresará en $m \cdot s^{-1}$ si la posición se mide en metros y el tiempo en segundos.

2. En la cuestión anterior, ¿en qué instante alcanza el objeto que se mueve a la velocidad de 3 $m \cdot s^{-1}$?

A partir de la expresión del módulo obtenida en la cuestión anterior, obtenemos el instante en que el objeto alcanza la velocidad de 3 $m \cdot s^{-1}$:

$$v(t) = 3 \rightarrow \sqrt{5 + t^2} = 3 \rightarrow 5 + t^2 = 9 \rightarrow t = 2 \text{ s}$$

La otra solución que se obtiene analíticamente, −2, carece de sentido físico.

3.5. ACELERACIÓN

Página 51

1. Calcula la aceleración con que se mueve un objeto que parte del reposo y recorre una distancia en línea recta de 100 m en 10 s, acelerando de modo uniforme.

Al resolver la cuestión hemos de tener en cuenta que, de acuerdo con el enunciado, el movimiento del objeto es rectilíneo uniforme y, como nos indican que el móvil acelera de modo uniforme, el valor de la aceleración será constante. Recuerda, además, que el curso pasado estudiaste las expresiones que proporcionan la velocidad y la posición en el m.r.u.a.:

$$v = v_0 + a \cdot t \quad ; \quad s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

En estas expresiones hemos supuesto que el móvil parte del origen del SR ($s_0 = 0$) y empezamos a contar el tiempo en el instante en que se pone en movimiento ($t_0 = 0$). De acuerdo con ello, como el objeto parte del reposo ($v_0 = 0$), la aceleración con que se moverá el objeto es:

$$a = \frac{2 \cdot s}{t^2} = \frac{2 \cdot 100}{10^2} = 2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

2. ¿Con qué velocidad se mueve el objeto de la cuestión anterior cuando han transcurrido dos segundos? ¿Qué tiempo debe transcurrir para que la velocidad sea de 10 m · s^{-1}?

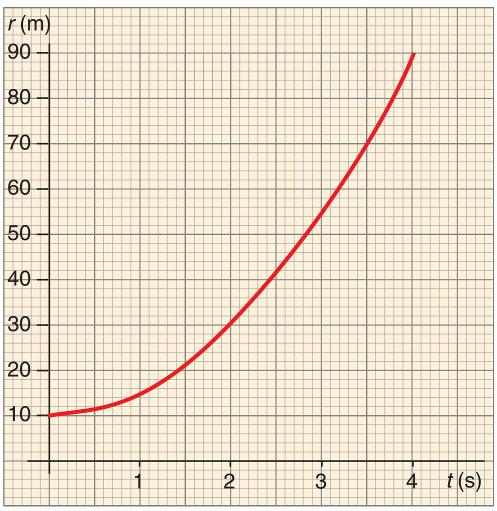
Sustituyendo valores en la expresión que permite calcular la velocidad (ejercicio anterior), obtenemos de inmediato el resultado que nos piden:

$$v = v_0 + a \cdot t \ \rightarrow \begin{cases} v_{t=2} = 0 + 2 \cdot 2 = 4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v = 10 \ \rightarrow \ t = \dfrac{v - v_0}{a} = \dfrac{10 - 0}{2} = 5\ \text{s} \end{cases}$$

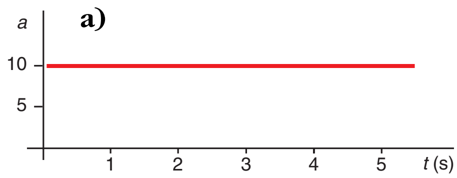
ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

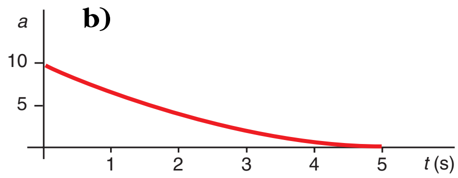
Cuestiones

1. La gráfica que sigue muestra cómo varía la posición de un objeto que se mueve partiendo del reposo:

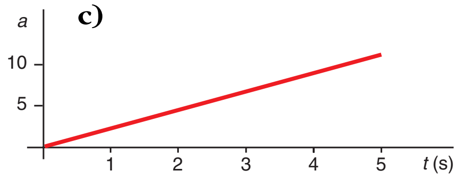


La gráfica que muestra la aceleración del móvil en ese período de tiempo debe ser:

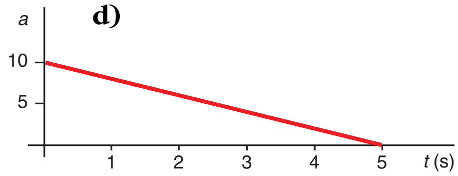




c)



d)



Tan solo con ver la curva debemos deducir que el movimiento es acelerado.

Observa que la tangente a la curva varía, dependiendo del punto en el que la tracemos. Ello significa que el valor de la velocidad varía; por tanto, la aceleración no puede ser nula.

Profundizando un poco más en la cuestión, nos podemos preguntar si la aceleración es constante a lo largo del movimiento. Para responder a esa pregunta, tomamos distintos instantes de tiempo y trazamos la tangente a la curva en esos instantes, calculando así la velocidad. Al representarla luego en un gráfico *v-t*, podremos obtener conclusiones.

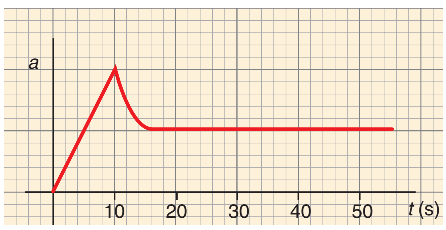
Los resultados que obtenemos, calculados a partir de la gráfica que nos proporcionan, son los siguientes:

tiempo (s)	2	3	4
velocidad (m/s)	$\frac{30-10}{2-0} = 10$	$\frac{55-15}{3-1} = 20$	$\frac{90-30}{4-2} = 30$

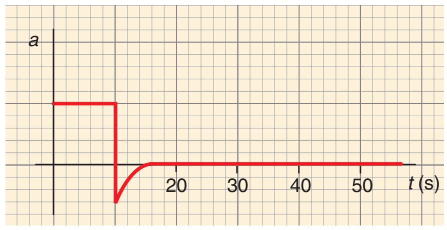
Observa que la velocidad se incrementa de modo uniforme. Por tanto, la aceleración es constante. Para calcular el valor de la aceleración que corresponde a cada intervalo puedes utilizar la expresión que permite calcular la aceleración media, con la que se obtiene, al analizar los intervalos 2-3 s y 3-4 s, un valor para la aceleración igual a 10 m · s^{-2}. Por tanto, el gráfico *a-t* que representa el movimiento es el gráfico **a)**.

2. Un paracaidista salta desde un avión y cae libremente durante 10 segundos antes de abrir el paracaídas. ¿Cuál de los gráficos *a-t* que siguen representa mejor la aceleración vertical que actúa sobre él durante los cincuenta primeros segundos del movimiento?

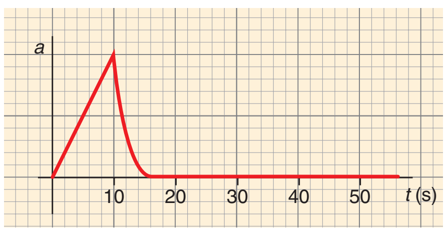
a)



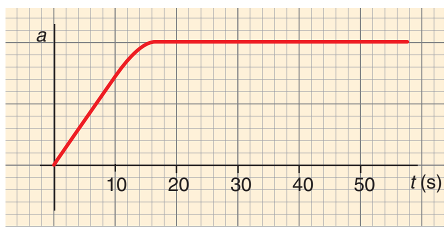
b)



c)



d)



Para contestar esta pregunta debemos estudiar con cierto detalle el movimiento.

Despreciando el efecto del aire durante los 10 primeros segundos (lo que puede hacerse, en una primera aproximación), el paracaidista cae con aceleración constante, sometido a la acción de la gravedad. Por tanto, en un diagrama *a-t*, lo que representaremos será una línea horizontal (a = cte.).

Pero ¿qué ocurre cuando se abre el paracaídas ($t = 10$)?

Observa que, lo que se produce, tras tirar de la anilla, es un frenado muy brusco, casi instantáneo.

Como sabes, un frenado es una aceleración negativa, ya que, seleccionado un intervalo de tiempo, la velocidad será menor en el instante final que en el inicial.

Pasado este instante, la aceleración sigue siendo negativa, aunque menor, ya que la velocidad con que se mueve el paracaidista se va aproximando a la velocidad de caída con el paracaídas abierto, velocidad que es menor, lo que hace que la aceleración siga siendo negativa, aunque cada vez menor, en valor absoluto.

Transcurrido cierto tiempo desde que abrió el paracaídas, el paracaidista se mueve con velocidad constante (la velocidad con que llegará a tierra) y su aceleración se anula ($t = 16$ s).

La gráfica que se corresponde con el movimiento que describimos es, por tanto, la **b):**

- Existe un primer intervalo de tiempo [(0,10) segundos] en el que la aceleración se mantiene constante e igual a la de caída libre.
- En el instante $t = 10$ se aprecia el brusco descenso que se produce en la aceleración (pasa a ser negativa), consecuencia del frenado que se produce al abrir el paracaídas.
- Finalmente, la aceleración de frenado va disminuyendo (en valor absoluto), hasta llegar a anularse, lo que significa que la velocidad de caída alcanza un valor constante.

Las gráficas a, c y d no reflejan lo sucedido. En las tres se observa que la aceleración aumenta en los diez primeros segundos, lo que está en contra del razonamiento seguido.

Como reto, te proponemos que demuestres que la gráfica **d)** es el gráfico velocidad-tiempo de este movimiento (si el eje de ordenadas representase la velocidad, en vez de la aceleración).

3. Traza cualitativamente en un diagrama *v-t* las gráficas que corresponden a los siguientes movimientos:

a) v_0 positiva y a_t nula.

b) v_0 positiva y a_t constante positiva.

c) v_0 negativa y a_t constante negativa.

a) v_0 positiva y a_t nula:

Al ser $a_t = 0$, el módulo de la velocidad no experimenta cambios y, por tanto, al representar la velocidad en el diagrama v-t obtenemos una recta paralela al eje de abscisas ($v = v_0 = \text{cte.}$).

b) v_0 positiva y a_t constante positiva:

En este caso, al ser la aceleración constante, la velocidad varía linealmente con el tiempo:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Esta expresión corresponde a una recta de pendiente a y ordenada en el origen v_0.

c) v_0 negativa y a_t constante negativa:

La representación gráfica también es una recta, que tiene por ecuación:

$$v = -v_0 - a \cdot t$$

4. Si dos objetos experimentan el mismo desplazamiento en el mismo tiempo, podemos afirmar que poseen la misma:

a) Velocidad final.

b) Velocidad inicial.

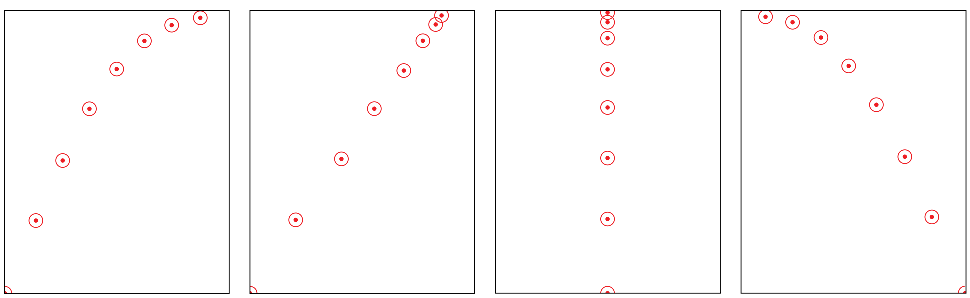
c) Aceleración.

d) Velocidad media.

Lo que indica el enunciado tan solo es posible si los dos objetos se mueven con la misma velocidad media. Recuerda que la velocidad media es la relación que existe entre el cambio de posición de un cuerpo, caracterizado por el vector desplazamiento, y el tiempo que transcurre hasta que se produce dicho cambio. La respuesta correcta es, de acuerdo con esta definición, la **d).**

5. Una bola está suspendida mediante un electroimán del techo de un vagón que se mueve hacia la derecha con una velocidad de 2 m · s^{-1}. El vagón se ilumina con luz de flash y se toma una foto de la bola al caer al suelo del vagón. La cámara también se mueve hacia la derecha, siendo su velocidad 2 m · s^{-1}. La fotografía que se obtiene es:

a) **b)** **c)** **d)**



La cámara está en reposo respecto al vagón. Por tanto, para un observador que acompaña a la cámara en su movimiento el objeto no posee componente horizontal de la velocidad y, por tanto, se encuentra en reposo antes de que el electroimán lo suelte.

Dicho con otras palabras: si un objeto se mueve en la misma dirección y sentido que otro y con la misma rapidez, no existirá un movimiento relativo entre ambos, pues ninguno de los dos recorre una distancia mayor que el otro (para ello tendría que ir más deprisa). Por tanto, si no se modifica la posición relativa de uno respecto al otro, la velocidad horizontal (en ese sistema de referencia) será nula.

Piensa, por ejemplo, que puedes ir hablando con otra persona mientras caminas y, aunque los dos os estáis moviendo, ninguno ve que el otro escape, es decir, ninguno "lleva velocidad" respecto al otro.

Aclarado esto, lo que registrará la cámara (situada dentro del vagón) es tan solo **un objeto cayendo verticalmente, en línea recta,** igual que veríamos caer nosotros a una pelota dejada caer desde lo alto de la azotea de casa y que vemos pasar por delante de nuestra ventana. Por tanto, la gráfica que representa este movimiento es la gráfica **c).**

6. **Al hablar del vector aceleración hemos visto un nuevo concepto, el de componentes intrínsecas. ¿Por qué no hablamos de componentes intrínsecas del vector velocidad?**

   Cuando definimos la velocidad instantánea dijimos que su "dirección es tangente a la trayectoria, y su sentido el de avance del movimiento". Partiendo de esa definición, resulta innecesario definir las componentes intrínsecas de la velocidad, pues su dirección y sentido siempre están definidos con claridad, en relación a la propia trayectoria.

   Sin embargo, cuando hablamos de la aceleración sí lo hacemos, pues la dirección de la aceleración no está referida, necesariamente, a la trayectoria: el vector aceleración no posee una dirección única respecto al movimiento. Por eso utilizamos las direcciones tangencial y normal a la trayectoria, en el punto donde se encuentra el móvil en cada caso, para definir con precisión la dirección, el sentido y el valor del vector aceleración.

7. **¿Es posible que, en un instante dado, un móvil posea velocidad y aceleración, de tal modo que sus módulos y direcciones sean iguales y sus sentidos opuestos? Razona, si es posible, cuándo se da el caso.**

   Esta coincidencia puede darse, por ejemplo, cuando un objeto que se mueve con movimiento rectilíneo, frena. Veamos con detalle la razón de que sea así.

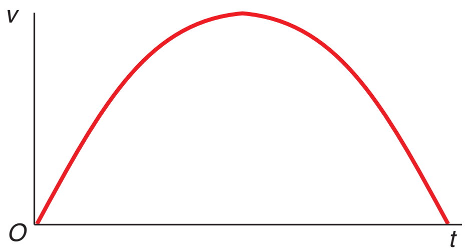
   En primer lugar, es evidente que tan solo pueden coincidir en dirección la aceleración y la velocidad si el movimiento es rectilíneo. En un movimiento que no sea rectilíneo, la velocidad será tangente a la trayectoria (siempre lo es), pero la aceleración tendrá una componente tangencial y otra normal, siendo esta última perpendicular a la trayectoria. Por tanto, tan solo será tangente la aceleración tangencial, pero no la aceleración total, que es la suma vectorial de la aceleración tangencial y normal.

Por otra parte, los sentidos de la velocidad y de la aceleración son opuestos, por ejemplo, en un proceso de frenado, esto es, cuando un cuerpo avanza rectilíneamente con cierta velocidad (velocidad positiva) y frena (aceleración negativa).

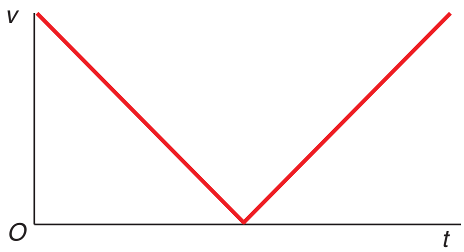
En el ejemplo que se indica puede ocurrir que el módulo de la aceleración de frenado coincida con el de la velocidad. Cuando esto ocurra, se cumplirán las tres condiciones que nos indica el enunciado.

8. ¿Cuál de los gráficos muestra correctamente la relación que existe entre el módulo de la velocidad de una bola lanzada verticalmente hacia arriba y el tiempo que dura el movimiento?

a)

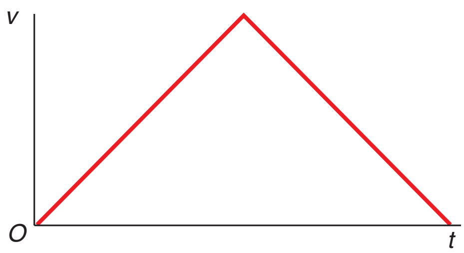


b)



c)

d)



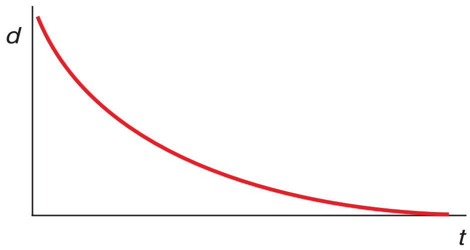
En el instante en que lanzamos la bola hacia arriba, su velocidad es máxima.

A partir del instante en que sale de nuestras manos, la bola se ve sometida a una aceleración de frenado constante, ya que la aceleración de la gravedad atrae los cuerpos hacia el suelo y, por tanto, en sentido opuesto al movimiento de la bola.

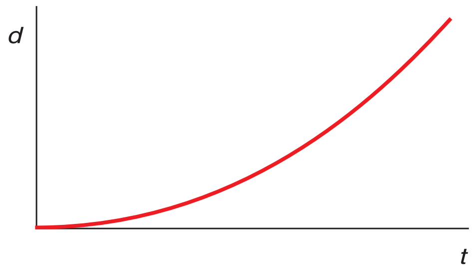
Por tanto, la velocidad con que esta se mueve irá disminuyendo linealmente, hasta que se anule. En ese momento se invertirá el sentido del movimiento y, sometida a la misma aceleración constante (gravedad), su velocidad irá aumentando en valor absoluto de forma lineal, siendo máxima de nuevo cuando retorne a nuestras manos. Por tanto, el gráfico que expresa la evolución que hemos descrito es el gráfico **b).**

9. Se lanza un carrito por una mesa horizontal, dándole un impulso inicial y dejándolo posteriormente en libertad. ¿Cuál de los gráficos que siguen representa el movimiento del carrito, si la distancia se mide a partir del punto desde el que se lanza?

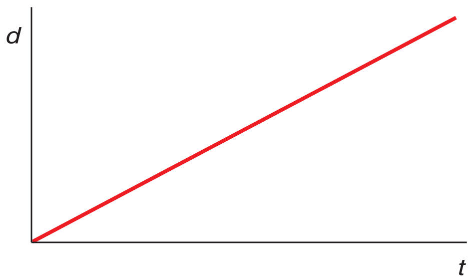
a)



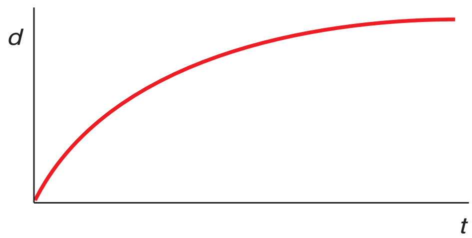
b)



c)



d)



En principio, parece claro que la gráfica será creciente, puesto que, una vez impulsado, el carrito recorrerá cada vez más espacio, a medida que avance el tiempo.

Sin embargo, en los primeros instantes la distancia recorrida será mayor, ya que el carrito va deteniendo poco a poco su movimiento, debido a la acción de las fuerzas de rozamiento.

Ello significa que en los primeros instantes la velocidad instantánea es mayor, disminuyendo esta a medida que transcurre el tiempo. Por tanto, es la gráfica **d)** la que nos muestra con claridad la evolución del movimiento.

Ejercicios

10. En un movimiento sobre el plano *XY*, la ecuación que expresa dicho movimiento es:

$$\vec{r} = 2 \cdot t \cdot \vec{i} + (160 - 4 \cdot t^2) \cdot \vec{j}$$

a) Calcula la ecuación de la trayectoria.

b) Dibuja en una hoja de papel milimetrado la ecuación de la trayectoria para un intervalo de tiempo comprendido entre los instantes $t = 0$ y $t = 7$ segundos.

a) Ecuación de la trayectoria:

La ecuación de la trayectoria es el lugar geométrico que describe la relación que existe, en cualquier instante, entre los componentes del vector posición de un objeto en movimiento. Para calcularla, procedemos del siguiente modo:

1. Obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$x = 2 \cdot t$$

$$y = 160 - 4 \cdot t^2$$

b) Y eliminamos la variable tiempo entre las dos ecuaciones. De ese modo, queda:

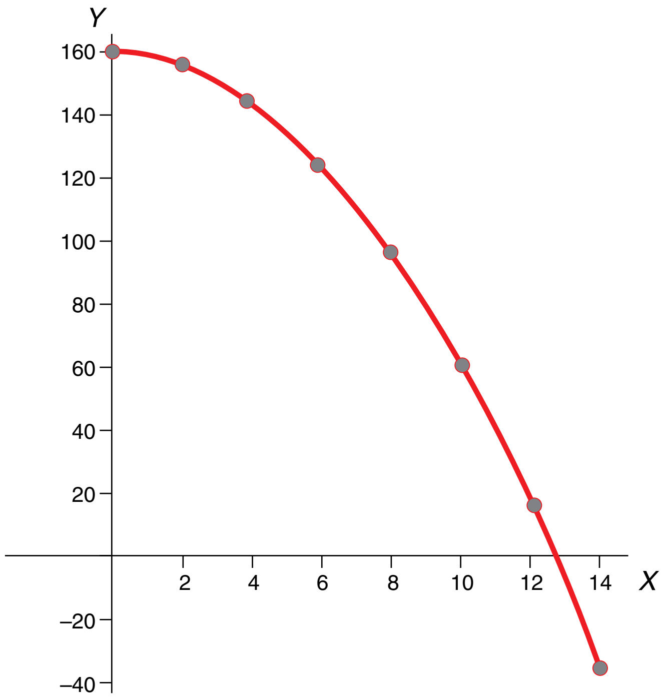
$$x = 2 \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{2}$$

$$y = 160 - 4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 160 - x^2$$

Para dibujar ahora la trayectoria en el intervalo $t = [0, 7]$, calculamos la posición (x, y) del punto en distintos instantes, comprendidos en el intervalo. De ese modo, obtenemos la siguiente tabla de resultados:

t	0	1	2	3	4	5	6	7
x	0	2	4	6	8	10	12	14
y	160	156	144	124	96	60	16	–36

b) Al representar los valores que hemos calculado para la posición, obtenemos para la trayectoria la siguiente gráfica:



11. El movimiento de una partícula viene dado por la expresión:

$$\vec{r} = \left(2 \cdot t^2 + 2\right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{8}{3} \cdot t^3 + 1\right) \cdot \vec{j} + \left(t + 3\right) \cdot \vec{k}$$

En esta expresión la posición se expresa en metros si el tiempo se expresa en segundos.

Calcula:

a) El vector velocidad.

b) El módulo del vector velocidad.

c) El vector aceleración.

d) El módulo del vector aceleración.

a) Vector velocidad:

El cálculo del vector velocidad lo hacemos procediendo del mismo modo que en la cuestión 1 de la página 49 del libro del alumno:

$$v = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{v} = \frac{[2 \cdot (t + \Delta t)^2 + 2] \cdot \vec{i} + \left[\frac{8}{3} \cdot (t + \Delta t)^3 + 1\right] \cdot \vec{j} + (t + \Delta t + 3) \cdot \vec{k} - \left[(2 \cdot t^2 + 2) \cdot \vec{i} + \left(\frac{8}{3} \cdot t^3 + 1\right) \cdot \vec{j} + (t + 3) \cdot \vec{k}\right]}{\Delta t}$$

Operando y simplificando en la expresión anterior llegamos a la siguiente:

$$\vec{v} = 4 \cdot t \cdot \vec{i} + 2 \cdot \Delta t \cdot \vec{i} + 8 \cdot t^2 \cdot \vec{j} + 8 \cdot t \cdot \Delta t \cdot \vec{j} + \frac{8}{3} \cdot (\Delta t)^2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$$

Cuando Δt tiende a cero, el vector velocidad es:

$$\vec{v} = (4 \cdot t \cdot \vec{i} + 8 \cdot t^2 \cdot \vec{j} + \vec{k}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Módulo del vector velocidad:

El módulo del vector velocidad será, por tanto:

$$v = \sqrt{\left(4 \cdot t\right)^2 + \left(8 \cdot t^2\right)^2 + 1} = \sqrt{64 \cdot t^4 + 16 \cdot t^2 + 1} = \sqrt{\left(8 \cdot t^2 + 1\right)^2} = (8 \cdot t^2 + 1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Es importante que cuando realices una operación matemática compleja tengas en cuenta las simplificaciones que puedan existir: cuadrados perfectos, relaciones trigonométricas, etc.

Un buen ejemplo de lo que decimos lo tienes en el cálculo del módulo de la velocidad que acabamos de realizar: la existencia de un cuadrado perfecto nos permite eliminar la raíz cuadrada, lo que simplifica extraordinariamente los cálculos. De no haberlo hecho así, imagina la complejidad en que nos hubiésemos visto envueltos al calcular, por ejemplo, la aceleración tangencial.

Pensar antes de actuar ayuda a simplificar los problemas y permite evitar cálculos y expresiones incómodas con las que, a buen seguro, nos encontramos al actuar de modo mecánico.

c) Vector aceleración:

El cálculo del vector aceleración lo hacemos del siguiente modo:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{a} = \frac{4 \cdot (t+\Delta t) \cdot \vec{i} + 8 \cdot (t+\Delta t)^2 \cdot \vec{j} + \vec{k} - (4 \cdot t \cdot \vec{i} + 8 \cdot t^2 \cdot \vec{j} + \vec{k})}{\Delta t}$$

Operando y simplificando obtenemos:

$$\vec{a} = 4 \cdot \vec{i} + 16 \cdot t \cdot \vec{j} + 8 \cdot \Delta t \cdot \vec{j}$$

Y, cuando Δt tiende a cero:

$$\vec{a} = 4 \cdot \vec{i} + 16 \cdot t \cdot \vec{j}$$

d) Módulo del vector aceleración:

El módulo del vector aceleración será, por tanto,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4^2 + (16 \cdot t)^2} = 4 \cdot \sqrt{(1 + 16 \cdot t^2)} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

12. Un móvil se desplaza sobre el plano *XY* tal como indican las ecuaciones paramétricas:

$$\boldsymbol{x = 3 \cdot t^3 - \frac{1}{2} \cdot t^2 + 6}$$

$$\boldsymbol{y = 6 \cdot t^2 + sen\,(2 \cdot t)}$$

$$\boldsymbol{z = 0}$$

En esta expresión, *x*, *y*, *z* se expresan en metros y *t* en segundos.

a) Calcula la velocidad y la aceleración del móvil en cualquier instante.

b) Concreta el resultado para el instante *t* = 15 s.

a) La velocidad y la aceleración se calculan del mismo modo que en los ejercicios anteriores. En este caso, calcularemos cada componente por separado:

- $$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$v_x = \frac{3 \cdot (t+\Delta t)^3 - (t+\Delta t)^2/2 + 6 - [3 \cdot t^3 - t^2/2 + 6]}{\Delta t}$$

Operando y simplificando, llegamos a la siguiente expresión:

$$v_x = 9 \cdot t^2 + 9 \cdot t \cdot \Delta t + 3 \cdot (\Delta t)^2 - t - \frac{\Delta t}{2}$$

Finalmente, como Δt tiende a cero, la componente x de la velocidad queda como:

$$v_x = 9 \cdot t^2 - t$$

- $$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

$$v_y = \frac{6 \cdot (t+\Delta t)^2 + sen[2 \cdot (t+\Delta t)] - [6 \cdot t^2 + sen(2 \cdot t)]}{\Delta t} =$$

$$= \frac{6 \cdot (t+\Delta t)^2 + sen(2 \cdot t + 2 \cdot \Delta t) - 6 \cdot t^2 - sen(2 \cdot t)}{\Delta t}$$

Si aplicamos al segundo sumando del numerador la fórmula que relaciona las razones trigonométricas del ángulo suma obtenemos:

$$v_y = \frac{6 \cdot [t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2] + sen(2 \cdot t) \cdot cos(2 \cdot \Delta t) + cos(2 \cdot t) \cdot sen(2 \cdot \Delta t) - 6 \cdot t^2 - sen(2 \cdot t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{6 \cdot t^2 + 12 \cdot t \cdot \Delta t + 6 \cdot (\Delta t)^2 + sen(2 \cdot t) \cdot [cos(2 \cdot \Delta t) - 1] + cos(2 \cdot t) \cdot sen(2 \cdot \Delta t) - 6 \cdot t^2}{\Delta t}$$

Haciendo ahora uso de la fórmula del coseno del ángulo doble:

$$v_y = \frac{12 \cdot t \cdot \Delta t + 6 \cdot (\Delta t)^2 + sen(2 \cdot t) \cdot [cos^2 \Delta t - sen^2 \Delta t - 1] + cos(2 \cdot t) \cdot sen(2 \cdot \Delta t)}{\Delta t}$$

y teniendo en cuenta que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos^2\alpha - 1 = -sen^2\alpha$:

$$v_y = \frac{12 \cdot t \cdot \Delta t + 6 \cdot (\Delta t)^2 + sen(2 \cdot t) \cdot [-2 \cdot sen^2 \Delta t] + cos(2 \cdot t) \cdot sen(2 \cdot \Delta t)}{\Delta t}$$

A continuación, aplicamos la fórmula del seno del ángulo doble y operamos:

$$v_y = \frac{12 \cdot t \cdot \Delta t + 6 \cdot (\Delta t)^2 - 2 \cdot sen(2 \cdot t) \cdot sen^2 \Delta t + 2 \cdot sen\Delta t \cdot cos\Delta t \cdot cos(2 \cdot t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{12 \cdot t \cdot \Delta t + 6 \cdot (\Delta t)^2 + 2 \cdot sen\Delta t \cdot [cos\Delta t \cdot cos(2 \cdot t) - sen\Delta t \cdot sen(2 \cdot t)]}{\Delta t}$$

Finalmente, aplicando la fórmula trigonométrica del coseno del ángulo suma y operando:

$$v_y = \frac{12 \cdot t \cdot \Delta t + 6 \cdot (\Delta t)^2 + 2 \cdot sen\Delta t \cdot cos(\Delta t + 2 \cdot t)}{\Delta t} =$$

$$= 12 \cdot t + 6 \cdot \Delta t + \frac{2 \cdot sen\Delta t}{\Delta t} \cdot cos(\Delta t + 2 \cdot t)$$

Para ángulos muy pequeños, el valor del seno del ángulo es aproximadamente igual al ángulo; es decir, cuando Δt tiende a cero, $sen\Delta t \simeq \Delta t$ y, por tanto:

$$\frac{sen\Delta t}{\Delta t} = 1 \quad \text{cuando} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

En consecuencia, el valor de la componente y del vector velocidad es:

$$v_y = 12 \cdot t + 2 \cdot cos(2 \cdot t)$$

Y el vector velocidad es:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} = (9 \cdot t^2 - t) \cdot \vec{i} + [12 \cdot t + 2 \cdot cos(2 \cdot t)] \cdot \vec{j}$$

siendo su módulo:

$$v = \sqrt{(9 \cdot t^2 - t)^2 + [12 \cdot t + 2 \cdot cos(2 \cdot t)]^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

En este momento, sugerimos que se les indique funcionalmente al alumnado cómo se realizan las derivadas del seno y del coseno, sin que sea necesario entrar a analizar los aspectos formales de la derivación, que verán en matemáticas.

De este modo, se puede comprobar la utilidad de este operador matemático, y darse cuenta del diferente grado de dificultad que entraña la resolución de un problema según el método que se aplique; en este caso, la diferencia entre el método incremental y el derivativo.

Derivando, por tanto, cada componente del vector velocidad, obtenemos el vector aceleración:

$$\vec{a} = (18 \cdot t - 1) \cdot \vec{i} + [12 - 4\, sen(2 \cdot t)] \cdot \vec{j}$$

siendo su módulo:

$$a = \sqrt{(18 \cdot t - 1)^2 + [2 - 4 \cdot sen(2 \cdot t)]^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) En el instante $t = 15$ s, el valor de la velocidad y la aceleración instantáneas son:

$$v(t = 15) = \sqrt{(9 \cdot 15^2 - 15)^2 + [12 \cdot 15 + 2 \cdot cos(2 \cdot 15)]^2} = 2.018 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a(t = 15) = \sqrt{(18 \cdot 15 - 1)^2 + [12 - 4 \cdot sen(2 \cdot 15)]^2} = 269{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

13. El vector de posición de una partícula en movimiento es:

$$\boldsymbol{\vec{r} = t^3 \cdot \vec{i} + t \cdot \vec{j}}$$

En esta expresión, la posición se expresa en metros si el tiempo se expresa en segundos.

Calcula:

a) La ecuación de la trayectoria.

b) La velocidad y la aceleración en cualquier instante.

a) Ya hemos mencionado antes el significado físico que tiene la ecuación de la trayectoria (ejercicio 10). Por tanto, procedemos ahora a calcularla. Para ello:

1. Obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$x = t^3$$

$$y = t$$

2. Y eliminamos la variable tiempo entre las dos ecuaciones. De este modo, queda:

$$t = \sqrt[3]{x} \rightarrow y = \sqrt[3]{x}$$

b) El cálculo de la velocidad lo haremos como en ejercicios anteriores:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{(t + \Delta t)^3 \cdot \vec{i} + (t + \Delta t) \cdot \vec{j} - [t^3 \cdot \vec{i} + t \cdot \vec{j}]}{\Delta t}$$

Operando y simplificando llegamos a la siguiente expresión:

$$\vec{v} = 3 \cdot t^2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot t \cdot \Delta t \cdot \vec{i} + (\Delta t)^2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$$

que cuando Δt tiende a cero, queda como:

$$\vec{v} = (3 \cdot t^2 \cdot \vec{i} + \vec{j}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Para calcular la aceleración instantánea, aplicamos el mismo método, ahora sobre el vector velocidad instantánea:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{3 \cdot (t + \Delta t)^2 \cdot \vec{i} + \vec{j} - (3 \cdot t^2 \cdot \vec{i} + \vec{j})}{\Delta t} =$$

$$= \frac{3 \cdot [t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2] \cdot \vec{i} + \vec{j} - 3 \cdot t^2 \cdot \vec{i} - \vec{j}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{6 \cdot t \cdot \Delta t \cdot \vec{i} + 3 \cdot (\Delta t)^2 \cdot \vec{i}}{\Delta t} = 6 \cdot t \cdot \vec{i} + 3 \cdot \Delta t \cdot \vec{i}$$

Cuando Δt tiende a cero, obtenemos:

$$\vec{a} = 6 \cdot t \cdot \vec{i} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$