

SISTEMA DE REFERENCIA

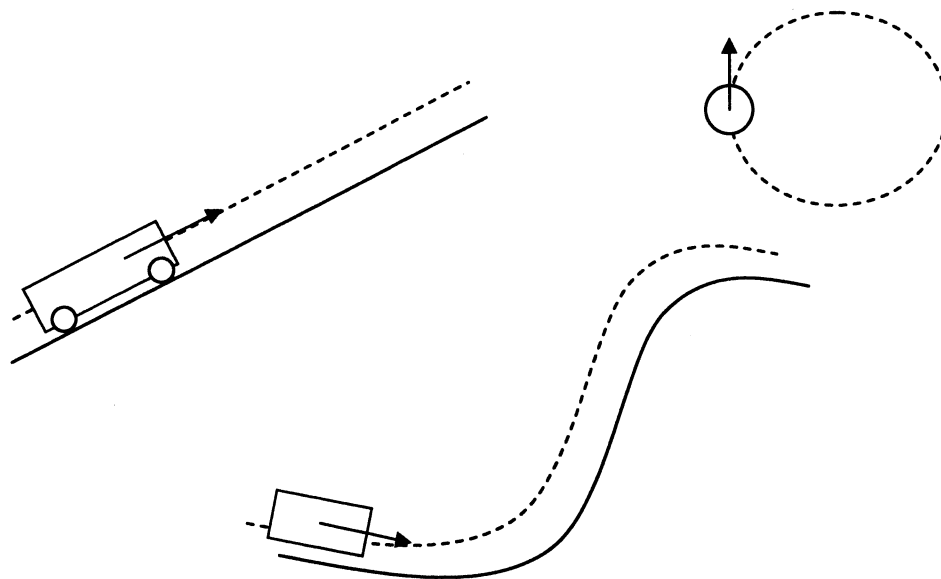
Cuando describimos el movimiento de un cuerpo, lo hacemos siempre tomando como referencia otros cuerpos que no se mueven o que, al menos en apariencia, así lo parece. Estos cuerpos constituyen el Sistema de Referencia.

Llamamos **Sistema de Referencia** a un punto o conjunto de puntos con relación al cual se describe el movimiento de un cuerpo.

Un cuerpo se mueve si cambia su posición respecto al sistema de referencia, en caso contrario decimos que está en reposo.

TRAYECTORIA

Llamamos trayectoria a la línea formada por los sucesivos puntos por los que pasa un móvil durante su movimiento. Dependiendo del tipo de trayectoria el movimiento puede ser **rectilíneo**, **curvilíneo** o **circular**:

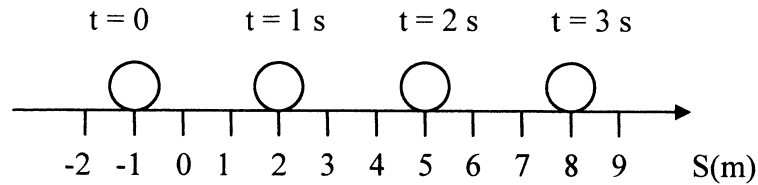
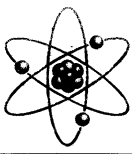


POSICIÓN, DESPLAZAMIENTO Y ESPACIO RECORRIDO

Llamamos **Posición (S)** de un móvil al punto que ocupa éste sobre la trayectoria en un momento dado. Su unidad, en el Sistema Internacional de Unidades, es el metro “**m**”.

Para determinar la posición de un móvil se fija primero un sistema de referencias y el origen de las posiciones ($S = 0$)

Observa la siguiente figura que representa el movimiento de un cuerpo. Sobre la trayectoria rectilínea se han indicado las posiciones ocupadas por el móvil en determinados instantes del tiempo.



Podemos recoger en una **tabla** la información representada en la figura:

Tiempo (s)	Posición (m)
0	-1
1	2
2	5
3	8

Cualquier movimiento implica la variación de la posición de un cuerpo respecto a un Sistema de Referencia que se supone en reposo.

El **espacio recorrido** (e) por el móvil en un determinado intervalo de tiempo se puede determinar directamente sobre la trayectoria. En nuestro ejemplo anterior el móvil recorre 9 metros en 3 segundos:

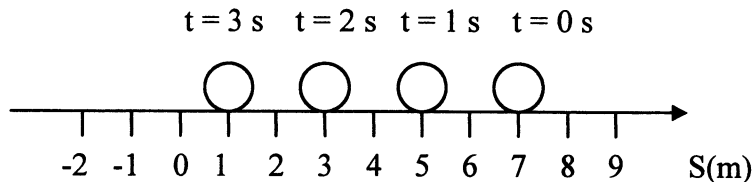
$$e = 9 \text{ m}$$

El **desplazamiento** (ΔS) en un determinado intervalo de tiempo se calcula restando las posiciones final e inicial del movimiento:

$$\Delta S = S_{\text{final}} - S_{\text{inicial}}$$

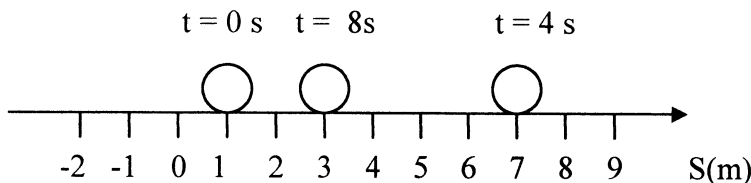
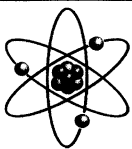
En nuestro ejemplo: $\Delta S = S_{\text{final}} - S_{\text{inicial}} = 8 - (-1) = 9 \text{ m}$

El espacio recorrido se considera siempre positivo pero el desplazamiento si puede ser negativo. Ejemplo:



En este ejemplo el móvil se mueve de derecha a izquierda, en sentido contrario al sentido positivo de las posiciones. Recorre 6 metros ($e = 6 \text{ m}$) y el desplazamiento resulta ser: $\Delta S = S_{\text{final}} - S_{\text{inicial}} = 1 - 7 = -6 \text{ m}$

El desplazamiento no siempre coincide numéricamente con el espacio recorrido. Por ejemplo:



En este ejemplo el móvil se mueve de la posición $S = 1$ m a la posición $S = 7$ m en 4 segundos y luego regresa sobre sus pasos, terminando el movimiento en la posición $S = 3$ m a los 8 segundos. Veamos el espacio recorrido y el desplazamiento:

$$e = 10 \text{ m } (6 + 4)$$
$$\Delta S = S_{\text{final}} - S_{\text{inicial}} = 3 - 1 = 2 \text{ m}$$

VELOCIDAD

La velocidad de un móvil representa la rapidez con que cambia su posición sobre la trayectoria.

Llamaremos **velocidad media** (V_m) al cociente entre la distancia recorrida por el móvil sobre la trayectoria en un intervalo de tiempo y el valor de dicho intervalo:

$$V_m = \frac{e}{t}$$

La unidad de medida de la velocidad en el Sistema Internacional de Unidades es el metro por segundo (**m/s**), pero con frecuencia se emplea el kilómetro por hora (**km/h**)

Ejemplo: un atleta recorre 100 metros en $10'4$ segundos. Determina la velocidad media en m/s y en km/h

Solución:

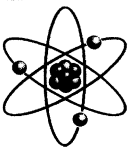
$$V_m = \frac{100 \text{ m}}{10'4 \text{ s}} = 9'6 \text{ m/s} = 9'6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 34'6 \text{ km/h}$$

Si el intervalo de tiempo que utilizamos para hallar la velocidad media lo suponemos muy corto, la velocidad media en ese intervalo se convierte en la velocidad instantánea en ese punto.

Llamamos **velocidad instantánea** (V) al valor de la velocidad del móvil en un instante determinado. Observa que la velocidad media se define en un intervalo de tiempo y la velocidad instantánea en un instante de tiempo concreto.

Ejemplo: el movimiento de un cuerpo está representado por los datos recogidos en la siguiente tabla:

Posición (m)	- 4	0	4	8	12	16	20	24
Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7



Determina el espacio recorrido, el desplazamiento y la velocidad media en el intervalo de 0 a 7 segundos.

$$e = 28 \text{ m} \quad \Delta S = 24 - (-4) = 28 \text{ m} \quad V_m = 28 \text{ m}/7 \text{ s} = 4 \text{ m/s}$$

Ejercicio nº 1

El movimiento de un cuerpo está representado por los datos recogidos en la siguiente tabla:

Posición (m)	- 10	5	20	35	50	65
Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5

Determina el espacio recorrido, el desplazamiento y la velocidad media en el intervalo de 0 a 5 segundos.

Ejercicio nº 2

Un coche recorre 25 km metros en 22 minutos. Determina la velocidad media en m/s y en km/h

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

El movimiento rectilíneo uniforme, abreviadamente **MRU**, es un movimiento cuya trayectoria es rectilínea y cuya velocidad es constante. Un cuerpo con MRU recorre espacios iguales en tiempos iguales.

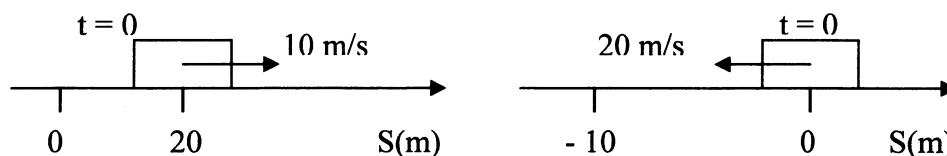
Podemos expresar matemáticamente el comportamiento de un móvil que se desplaza con un MRU con una ecuación matemática que relacione posición (S), tiempo (t) y velocidad (V). Esta ecuación constituye la **ecuación del MRU**: $S = S_0 \pm V(t - t_0)$
Siendo S_0 la posición en el instante t_0 (las condiciones iniciales del movimiento)

Normalmente comenzamos a medir el tiempo en el instante $t_0 = 0$ s y la ecuación queda:

$$S = S_0 \pm V.t$$

El movimiento puede ser en el sentido positivo de las posiciones (el signo "+") o en el sentido negativo de las posiciones (el signo "-")

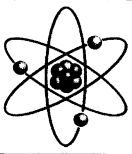
Ejemplo: escribe la ecuación de movimiento en cada caso



Solución:

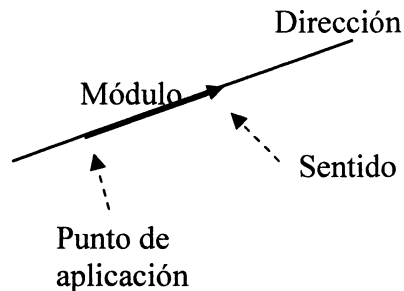
$$S = 20 + 10.t$$

$$S = 0 - 20.t = -20.t$$



Para representar la velocidad sobre el móvil se emplea un **vector** (una flecha). Los elementos de un vector son:

- **Módulo:** valor numérico de la magnitud que representa y que viene indicado por la longitud del vector.
- **Dirección:** línea recta sobre la que se dibuja el vector
- **Sentido:** se indica mediante la punta de la flecha con que se representa el vector. Cada dirección tiene dos sentidos.
- **Punto de aplicación:** es el punto de origen del vector



Con la ecuación de moviendo se puede determinar la posición de un móvil conociendo el tiempo o el tiempo conociendo la posición.

Ejemplo: el movimiento de un cuerpo queda determinado por la siguiente ecuación:

$$S = 120 - 40.t$$

Calcula: a) La posición a los 20 segundos; b) El tiempo que tarda en pasar por la posición $S = 0$; c) El tiempo que tarda en recorrer 100 metros.

Solución:

- a) $S(20 \text{ s}) = 120 - 40.20 = 120 - 800 = - 680 \text{ m}$
- b) $0 = 120 - 40.t$; $120 = 40.t \rightarrow t = 120/40 = 3 \text{ s}$
- c) $V = e/t$; $40 = 100/t \rightarrow t = 100/40 = 2'5 \text{ s}$

Ejemplo: un coche que se desplaza en línea recta a la velocidad constante de 60 km/h se encuentra en el km 20 de la carretera en el instante $t = 0$.

a) Calcula en qué km se hallará al cabo de 4 horas; b) Calcula el espacio recorrido en media hora; c) Calcula cuanto tiempo tardará en llegar al km 250.

Solución:

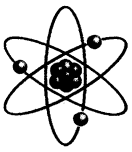
- a) $S = 20 + 60t \rightarrow S(4 \text{ h}) = 20 + 60.4 = 260 \text{ km}$
- b) $V = e/t$; $60 = e/0,5 \rightarrow e = 60.0'5 = 30 \text{ km}$
- c) $250 = 20 + 60.t$; $230 = 60.t \rightarrow t = 230/60 = 3'8 \text{ s}$

Ejemplo: un coche pasa a las 8 :00 h por el km 60 de la carretera a 80 km/h y, 2 horas más tarde, pasa por el mismo punto otro coche a 100 km/h, en el mismo sentido que el primer coche. Ambos mantienen la velocidad constante. Calcula el tiempo que tardan los coches en encontrarse y la distancia recorrida.

Solución:

Escribimos las ecuaciones de movimiento de los dos coches:

$$S_A = 60 + 80.t \quad S_B = 60 + 100.(t - 2)$$



Los dos coches se encuentran cuando coinciden sus posiciones: $S_A = S_B$

$$60 + 80 \cdot t = 60 + 100 \cdot (t - 2); 60 + 80t = 60 + 100t - 200; 200 = 20t \rightarrow t = 10 \text{ h}$$

Por último calculamos la distancia recorrida:

$$V_A = e/t; 80 = e/10 \rightarrow e_A = 800 \text{ km}$$

$$V_B = e/t; 100 = e/8 \rightarrow e_B = 800 \text{ km}$$

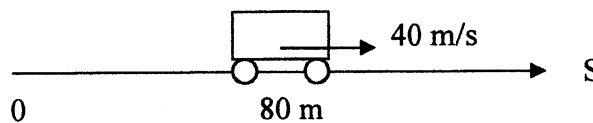
Ejercicio nº 3

La ecuación de un movimiento es: $S = 60 - 10t$

Calcula: a) El tiempo tarda en pasar por el origen; b) El tiempo tarda en recorrer 100 metros; c) La posición a los 2 minutos.

Ejercicio nº 4

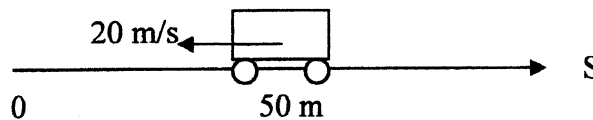
La figura representa la situación inicial de un automóvil.



Calcula: a) Ecuación de movimiento; b) Posición y velocidad a los 10 segundos; c) Espacio recorrido de 0 a 10 segundos.

Ejercicio nº 5

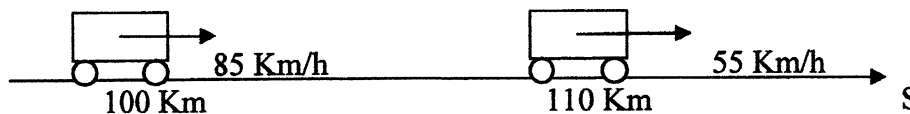
La figura representa la situación inicial de un automóvil.



Calcula: a) Ecuación del movimiento; b) Posición y velocidad a los 2 minutos; c) El tiempo que tarda en pasar por el origen ($S = 0$)

Ejercicio nº 6

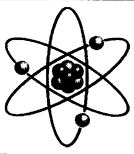
La figura representa la situación inicial de dos automóviles:



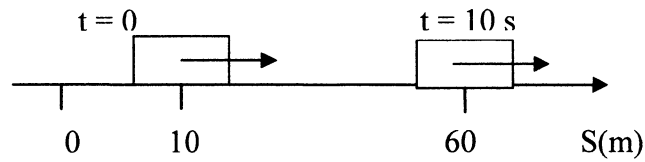
a) Escribe las ecuaciones de movimiento; b) Calcula el tiempo que tardan en encontrarse los dos coches y la posición en ese instante; c) Calcula el tiempo que tardan los dos automóviles en separarse 25 Km

GRÁFICAS DEL MRU

Una forma de estudiar los movimientos es representar las gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo. En el caso del MRU se obtendrá una línea recta para la gráfica posición-tiempo y una línea recta horizontal para la gráfica velocidad-tiempo.



Ejemplo: dado el siguiente movimiento uniforme escribe su ecuación de movimiento y representa las gráficas Posición-tiempo y Velocidad-Tiempo

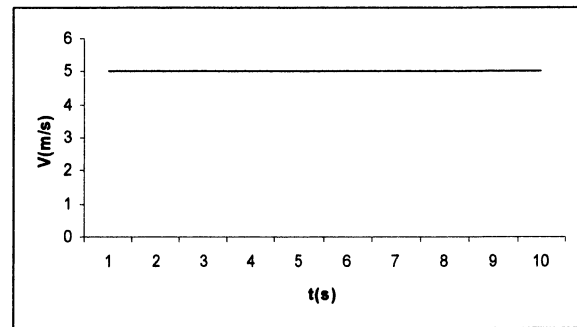
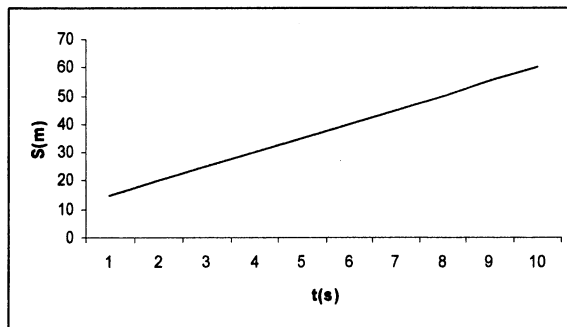


Solución:

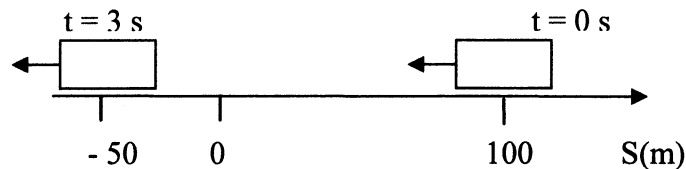
Primero determinamos la velocidad: $V = e/t = 50/10 \text{ s} = 5 \text{ m/s}$

Escribimos la ecuación de movimiento: $S = 10 + 5.t$

Por último representamos las gráficas:



Ejemplo: dado el siguiente movimiento uniforme escribe su ecuación de movimiento y representa las gráficas Posición-tiempo y Velocidad-Tiempo

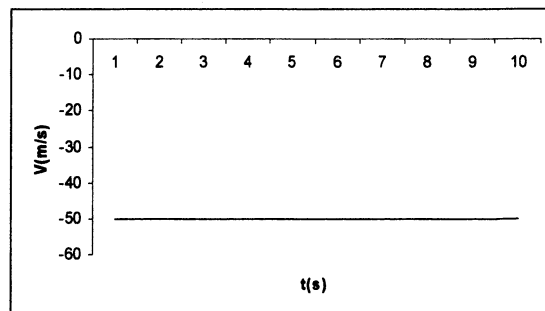
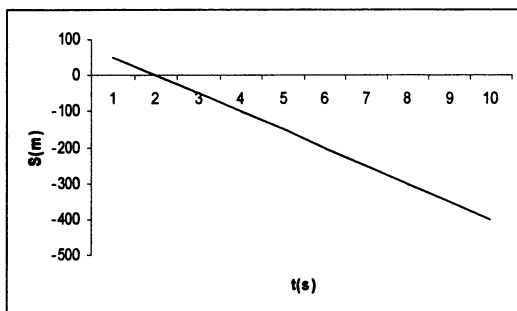


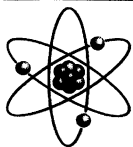
Solución:

Primero determinamos la velocidad: $V = e/t = 150\text{m}/3 \text{ s} = 50 \text{ m/s}$

Escribimos la ecuación de movimiento: $S = 100 - 50.t$

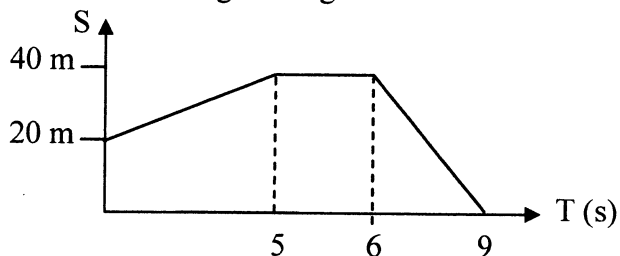
Por último representamos las gráficas:





Ejercicio nº 7

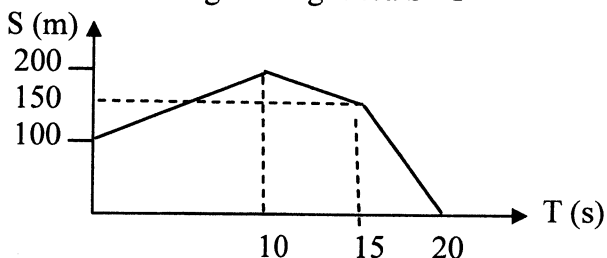
Un coche tiene la siguiente gráfica S – T:



- Calcula la velocidad y el espacio recorrido en cada tramo.
- Dibuja la gráfica V – T

Ejercicio nº 8

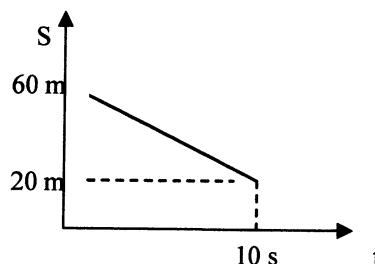
Un coche tiene la siguiente gráfica S – T



- Calcula la velocidad y el desplazamiento en cada tramo.
- Dibuja la gráfica V – T

Ejercicio nº 9

Observa la gráfica S – T y a partir de ella determina: a) Velocidad; b) La ecuación de movimiento; c) La posición a los 4 segundos. d) El desplazamiento a los 10 segundos



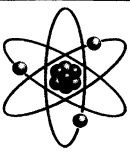
ACELERACIÓN

Cuando la velocidad de un móvil varía decimos que hay aceleración. Como la velocidad es un vector, podemos decir que un móvil tiene aceleración:

- Siempre que aumenta o disminuye el módulo de la velocidad
- Cuando cambia de dirección el vector velocidad.

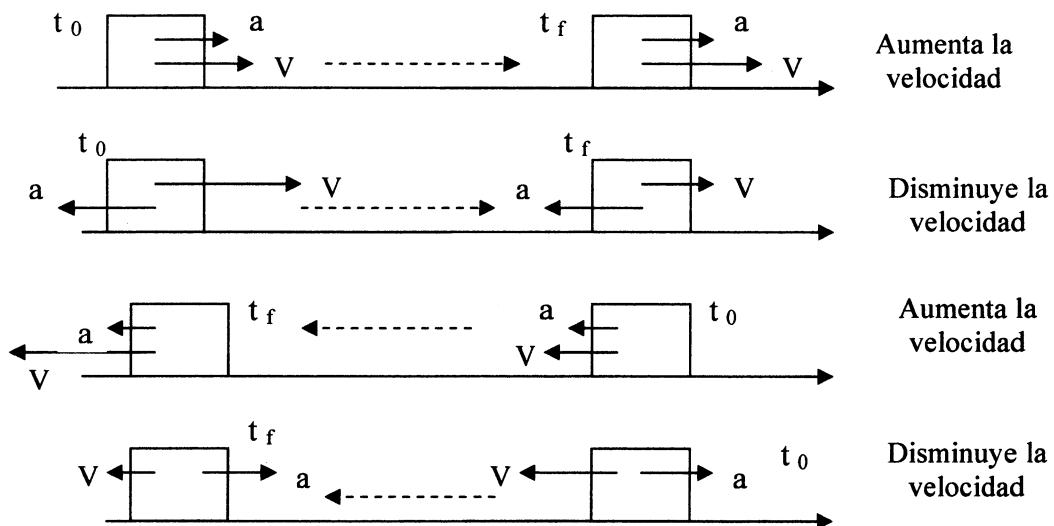
Si cambia el módulo del vector velocidad podemos determinar el valor de la aceleración dividiendo la variación de la velocidad por el intervalo de tiempo:

$$A = \frac{\Delta V}{t}$$

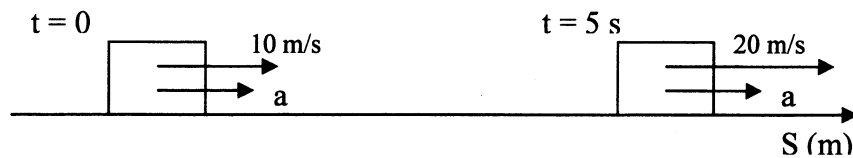


Llamamos **aceleración (A)** a la variación de la velocidad por unidad de tiempo. La unidad de la aceleración en el Sistema Internacional de Unidades es el metro por segundo al cuadrado (m/s^2)

La aceleración, igual que la velocidad, es una **magnitud vectorial** y para representarla emplearemos un vector. Si la velocidad y la aceleración tienen el mismo sentido el móvil aumenta la velocidad y si la aceleración y la velocidad tienen distinto sentido el móvil disminuye la velocidad.

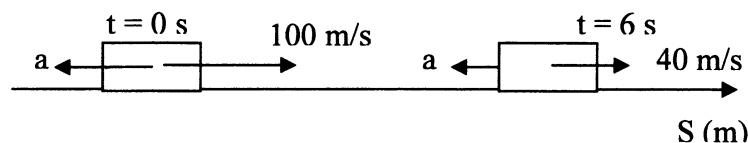


Ejemplo: determina la aceleración



Solución: $A = \Delta V/t = (20 - 10)/5 = 2 \text{ m/s}^2$

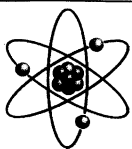
Ejemplo: determina la aceleración



Solución: $A = \Delta V/t = (40 - 100)/6 = -10 \text{ m/s}^2$

Ejercicio nº 10

Un coche acelera desde el reposo y logra una velocidad de 90 km/h en 10 segundos. Calcula la aceleración en m/s^2

**Ejercicio nº 11**

Un coche que circula a 80 km/h, frena y reduce su velocidad a 40 km/h en 14 segundos. Calcula la aceleración en m/s^2

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

Llamamos Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado, abreviadamente **MRUA**, al movimiento cuya trayectoria es una línea recta y cuya aceleración es constante.

Que la aceleración sea constante significa que la variación de la velocidad es constante. Por ejemplo: Si la aceleración es 2 m/s^2 , cada segundo la velocidad aumenta o disminuye en 2 m/s (aumenta si la velocidad y la aceleración tienen el mismo sentido y disminuye si tienen sentido contrario).

En el MRUA ya no se recorren espacios iguales en tiempos iguales.

- Si la velocidad aumenta, aumenta el espacio recorrido
- Si la velocidad disminuye, disminuye el espacio recorrido.

Ecuaciones del MRUA:

$$S = S_0 \pm V_0(t - t_0) \pm \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$$
$$V = V_0 \pm a(t - t_0)$$

Siendo “ S_0 ” y “ V_0 ” la posición y la velocidad en el instante inicial t_0 y “ a ” la aceleración. En general $t_0 = 0$ y queda:

$$S = S_0 \pm V_0.t \pm \frac{1}{2} a.t$$
$$V = V_0 \pm a.t$$

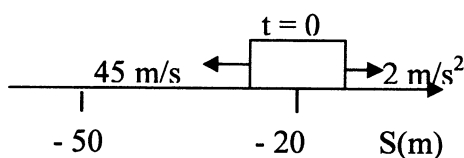
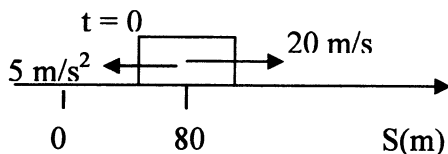
La velocidad inicial y la aceleración pueden ser en el sentido positivo de las posiciones (el signo “+”) o en el sentido negativo de las posiciones (el signo “-“)

Si el móvil no cambia de sentido se puede emplear la siguiente ecuación:

$$V^2 = V_0^2 \pm 2.a.e$$

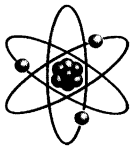
Siendo “ e ” el espacio recorrido.

Ejemplo: escribe las ecuaciones de movimiento en cada caso



Solución: $S = 80 + 20.t - \frac{1}{2} 5.t^2$
 $V = 20 - 5.t$

$$S = -20 - 45.t + \frac{1}{2} 2.t^2$$
$$V = -45 + 2t$$



Ejemplo: un coche que se desplaza en línea recta a la velocidad de 60 km/h acelera y logra una velocidad de 80 km/h en 1 minuto. Calcula: La aceleración del coche y el espacio recorrido en media hora.

Solución:

$$V_0 = 60 \text{ km/h} = 60 \cdot 1000 / 3600 = 16'67 \text{ m/s}$$

$$V_f = 80 \text{ km/h} = 22'22 \text{ m/s}$$

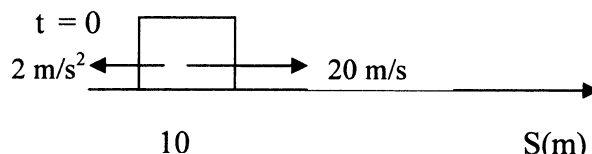
Determinamos la aceleración:

$$V = V_0 + a \cdot t \quad ; \quad 22'22 = 16'67 + a \cdot 60 \rightarrow a = 0'09 \text{ m/s}^2$$

Calculamos el espacio recorrido:

$$V^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot e \quad ; \quad 22'22^2 = 16'67^2 + 2 \cdot 0'09 \cdot e \rightarrow e = 1199 \text{ m}$$

Ejemplo: determina posición y velocidad a los 20 segundos y el espacio recorrido en ese intervalo de tiempo.



Solución:

$$S = 10 + 20 \cdot t - t^2 \rightarrow S(20 \text{ s}) = 10 + 400 - 400 = 10 \text{ m}$$

$$V = 20 - 2 \cdot t \rightarrow V(20 \text{ s}) = -20 \text{ m/s}$$

A los 20 segundos el móvil regresa al punto de partida.

El móvil se mueve primero hacia la derecha, frenando, hasta que se detiene en algún punto a la derecha de $S = 10 \text{ m}$. Igualando la velocidad a 0 podemos determinar el tiempo que tarda en detenerse:

$$V = 20 - 2 \cdot t = 0 \rightarrow t = 10 \text{ s}$$

Y sustituyendo el tiempo $t = 10 \text{ s}$ en la ecuación de la posición podemos determinar el punto donde se paró y cambio el sentido del movimiento:

$$S(10) = 10 + 200 - 100 = 110 \text{ m}$$

Por lo tanto, el móvil se desplaza de $S = 10 \text{ m}$ a $S = 110 \text{ m}$ en 10 segundos y tarda otros 10 segundos en regresa a $S = 10 \text{ m}$. El espacio recorrido será: $e = 100 + 100 = 200 \text{ m}$

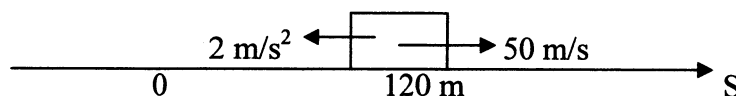
Ejercicio nº 12

Un coche parte del reposo, con una aceleración positiva de 4 m/s^2 , desde la posición $S = 100 \text{ m}$.

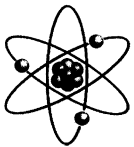
Calcula: a) Ecuaciones de movimiento; b) Posición y velocidad a los 5 segundos; c) Espacio recorrido de 0 a 5 segundos.

Ejercicio nº 13

La figura representa la situación inicial de un automóvil.



Calcula: a) Ecuaciones de movimiento; b) El tiempo que tarda en detenerse y su posición.



Ejercicio nº 14

Un coche marcha a 55 Km/h mientras que atraviesa un pueblo. Al salir de él, el conductor acelera hasta que su cuentakilómetros marca 85 Km/h, lo cual ocurre en 2 minutos.

Calcula: a) la aceleración en esos 2 minutos; b) El espacio recorrido en este tiempo

Ejercicio nº 15

Un coche corre con una rapidez de 60 km/h. Frena y logra detenerse tras recorrer 190 metros. ¿Cuál es su aceleración?

Ejercicio nº 16

La velocidad de un coche que viaja por una carretera se reduce uniformemente desde 70 Km/h hasta 50 Km/h, en una distancia de 150 m.

- a) ¿Cuánto tiempo ha empleado el coche en esa disminución de la velocidad?
- b) Suponiendo que el coche sigue frenando, ¿cuánto tiempo tardará en pararse y qué distancia total habrá recorrido?

Ejercicio nº 17

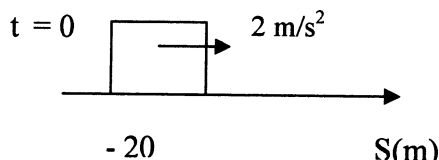
Un primer coche parte del reposo, con una aceleración positiva de 4 m/s^2 , desde la posición $S = -100 \text{ m}$. Otro coche sale, 14 segundos más tarde, de la posición $S = 900 \text{ m}$ con una velocidad positiva constante de 20 m/s .

Calcula: a) Ecuaciones de movimiento; b) El tiempo que tardan en encontrarse los dos coches. c) Posición y velocidad de los coches cuando se encuentran.

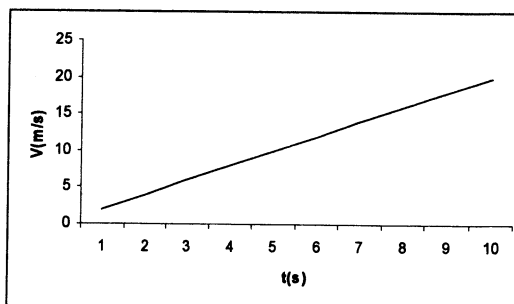
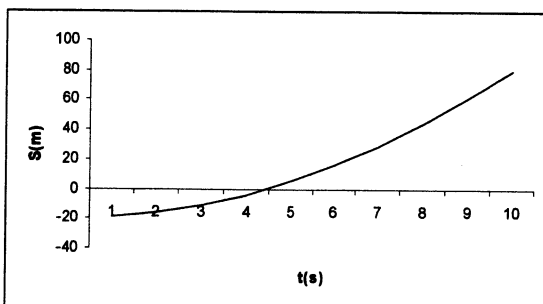
GRÁFICAS DEL MRUA

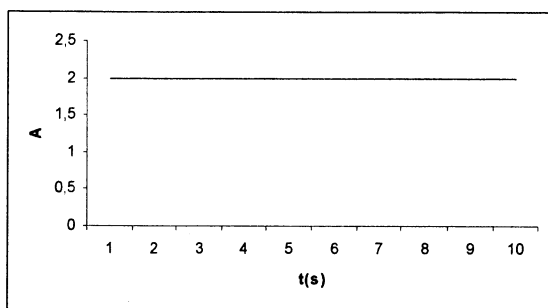
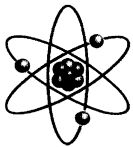
En el caso del MRUA se obtendrá una curva para la gráfica posición-tiempo, una línea recta para la gráfica velocidad-tiempo y una línea recta horizontal para la gráfica aceleración-tiempo.

Ejemplo: representa las gráficas posición-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo

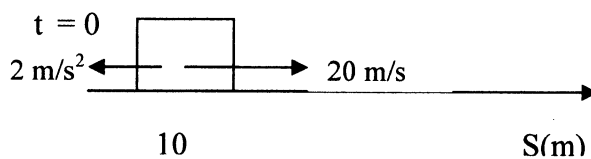


Solución:

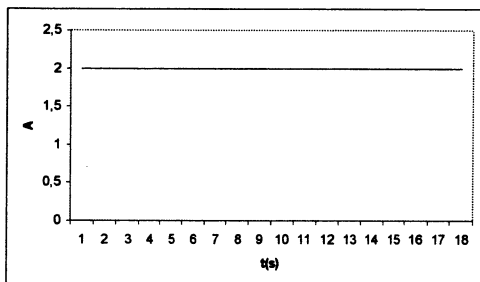
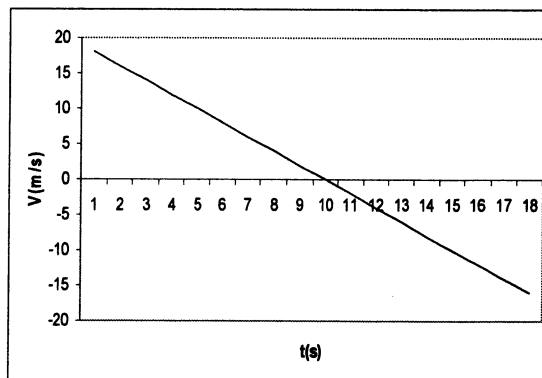
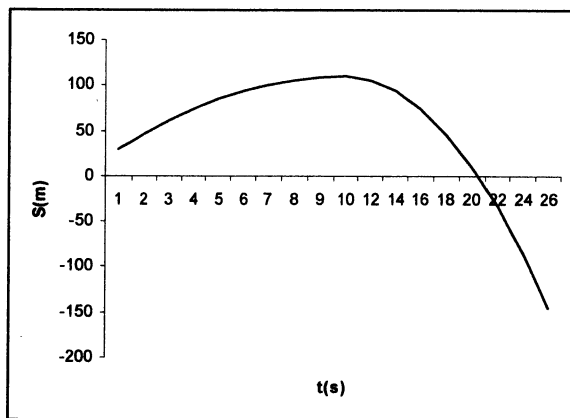


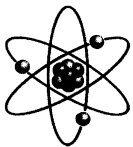


Ejemplo: representa las gráficas posición-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo



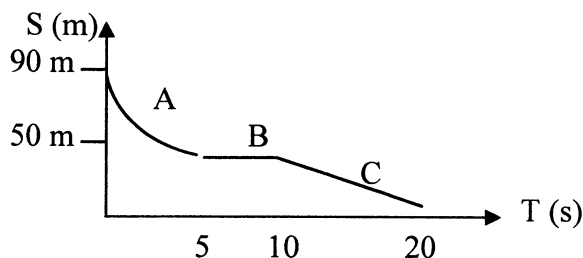
Solución:





Ejercicio nº 18

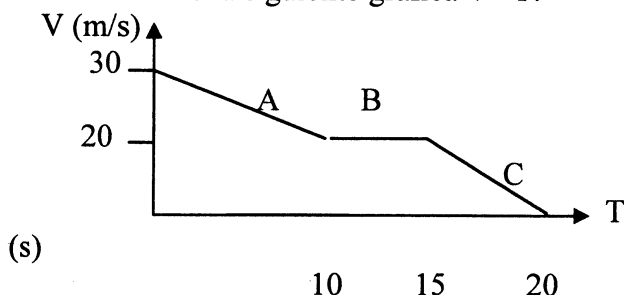
Un coche tiene la siguiente gráfica S –T:



- a) Calcula en cada tramo del movimiento: el espacio recorrido, la velocidad media y el desplazamiento.
b) Dibuja las gráficas velocidad-tiempo y aceleración-tiempo.

Ejercicio nº 19

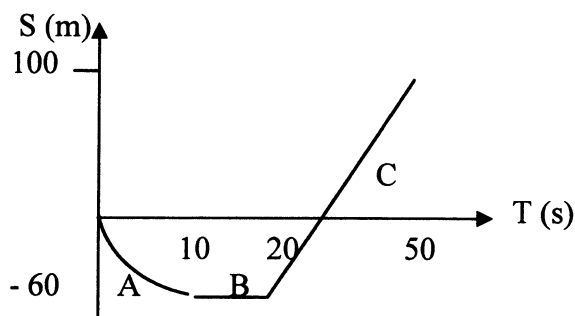
Un coche tiene la siguiente gráfica V –T:



- a) Dibuja la gráfica A – T correspondiente.
b) Calcula en cada tramo del movimiento la aceleración media.

Ejercicio nº 20

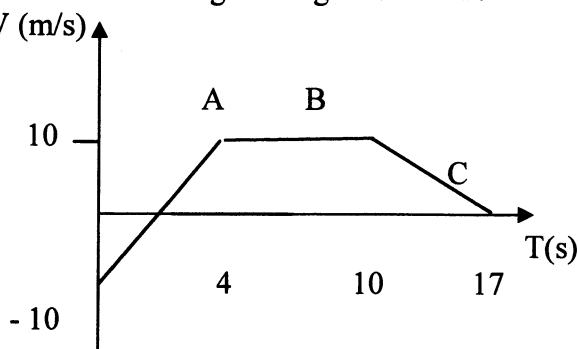
Un coche tiene la siguiente gráfica S –T:



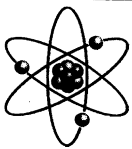
- a) Calcula en cada tramo del movimiento: el espacio recorrido, la velocidad media y el desplazamiento.
b) Dibuja las gráficas velocidad-tiempo y aceleración-tiempo.

Ejercicio nº 21

Un coche tiene la siguiente gráfica V –T:



- a) Dibuja la gráfica A – T correspondiente.
b) Calcula en cada tramo del movimiento la aceleración media.



LA CAÍDA LIBRE Y EL LANZAMIENTO VERTICAL

Si se deja caer un cuerpo desde una cierta altura o si se lanza verticalmente, el cuerpo experimenta la **aceleración de la gravedad**: $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

Las ecuaciones del movimiento son las del MRUA:

Lanzamiento vertical

desde el suelo:

$$S = V_0 \cdot t - \frac{1}{2} 9.8 \cdot t^2$$

$$V = V_0 - 9.8 \cdot t$$

Lanzamiento vertical

desde una cierta altura h :

$$S = h \pm V_0 \cdot t - \frac{1}{2} 9.8 \cdot t^2$$

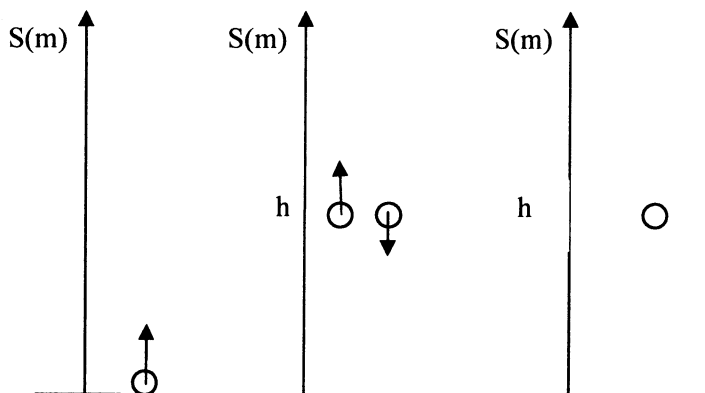
$$V = \pm V_0 - 9.8 \cdot t$$

Un cuerpo se deja caer

desde una cierta altura:

$$S = h - \frac{1}{2} 9.8 \cdot t^2$$

$$V = -9.8 \cdot t$$



Ejemplo: un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 25 m/s. Determina la altura máxima que alcanza el móvil.

Solución: Las ecuaciones de movimiento son:

$$S = 25 \cdot t - \frac{1}{2} 9.8 \cdot t^2$$

$$V = 25 - 9.8 \cdot t$$

Al lanzar un cuerpo verticalmente hacia arriba, le comunicamos una cierta velocidad inicial, pero la aceleración de la gravedad actúa en contra y el cuerpo disminuye su velocidad hasta que finalmente se detiene a una cierta altura. Luego vuelve a caer al suelo. Igualando a 0 la velocidad podemos determinar el tiempo que tarda en alcanzar dicha altura: $V = 25 - 9.8 \cdot t = 0 \rightarrow t = 2.5 \text{ s}$

Sustituimos el tiempo en la ecuación de la posición para determinar la altura máxima:

$$S(2.5 \text{ s}) = 25 \cdot 2.5 - \frac{1}{2} 9.8 \cdot 2.5^2 = 31.9 \text{ m}$$

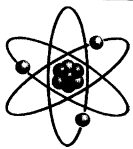
Ejemplo: para calcular la altura de una torre, dejamos caer un objeto desde lo alto y medimos el tiempo que tarda en llegar al suelo. Si sabemos que el objeto tarda 2.2 segundos en llegar al suelo, calcula la altura de la torre.

Solución: Las ecuaciones del movimiento son:

$$S = h - \frac{1}{2} 9.8 \cdot t^2$$

$$V = -9.8 \cdot t$$

Al alcanzar el suelo, la posición es $S = 0$. Sustituimos en la ecuación de la posición para determinar la altura: $0 = h - \frac{1}{2} 9.8 \cdot 2.2^2 \rightarrow h = 23.7 \text{ m}$

**Ejercicio nº 22**

Se deja caer un objeto desde una cierta altura, tardando 3'25 segundos en llegar al suelo. Calcula la altura desde la que se dejó caer y la velocidad con que llega al suelo.

Ejercicio nº 23

Una pelota es arrojada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s. Calcula: a) La altura máxima alcanzada; b) El tiempo que tarda en llegar al suelo y la velocidad de la pelota; c) El espacio total recorrido

Ejercicio nº 24

Una pelota es arrojada verticalmente hacia arriba desde una altura de 80 metros con una velocidad inicial de 40 m/s. Calcula: a) La altura máxima alcanzada; b) El tiempo que tarda en llegar al suelo y la velocidad de la pelota; c) El espacio total recorrido

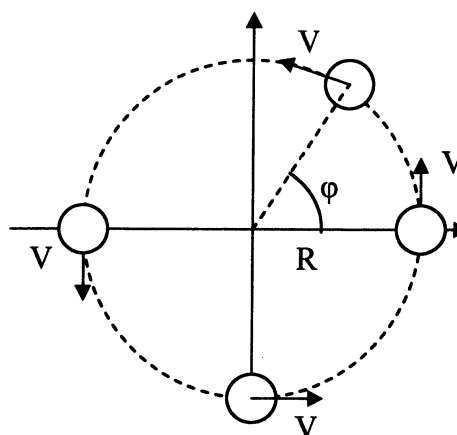
Ejercicio nº 25

Se deja caer una piedra desde una altura de 90 m. Simultáneamente, otra piedra es arrojada verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 40 m/s. Calcula: a) Ecuaciones de movimiento; b) El tiempo que tardan en encontrarse y su velocidad; c) El espacio recorrido por cada piedra en el momento de encontrarse.

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Un móvil se desplaza con **MCU** cuando su trayectoria es un círculo y su velocidad (en módulo) es constante. En el movimiento circular la dirección del vector velocidad cambia constantemente (ver figura).

Dado que la posición en un MCU se repite periódicamente, es posible estudiar dicho movimiento en función de magnitudes periódicas.

**Período (T)**

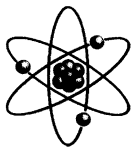
El período (T) es el tiempo que tarda el móvil en dar una vuelta completa. Se mide en segundos en el S.I.U.

La frecuencia (f)

La frecuencia (f) es el número de vueltas por unidad de tiempo. Su unidad en el S.I.U. será 1/s y se denomina **herzio (Hz)**

El período es la inversa de la frecuencia: $T = 1/f$

Por ejemplo, si el período vale 0'5 s, la frecuencia vale $1/0'5 = 2$ Hz. Esto quiere decir que el móvil tarda medio segundo en dar una vuelta completa ($T = 0'5$ s) y que, por tanto, da dos vueltas completas cada segundo ($f = 2$ Hz)



Velocidad angular (ω)

Llamamos velocidad angular (ω) al ángulo girado (φ) por el radio en que se sitúa el móvil en un intervalo de tiempo:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Podemos decir que un MCU es aquel cuya trayectoria es una circunferencia y que transcurre con velocidad angular constante.

La unidad de la velocidad angular es **radianes** por segundo (**rad/s**)

La relación entre grados y radianes es: $360^\circ = 2\pi$ radianes

Por ejemplo, un objeto que describe un MCU con una velocidad angular de π rad/s da media vuelta cada segundo (π rad = 180° , media vuelta)

Si consideramos que el ángulo descrito en una vuelta completa es 2π y que el tiempo que tarda en describirla es el período T, obtenemos la siguiente relación:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Otra unidad muy utilizada para la velocidad angular es la **revolución por minuto (rpm)**

Una revolución por minuto es una vuelta completa, 2π , en un minuto.

La frecuencia en Hz es el número de vueltas por segundo, es decir, el número de **revoluciones por segundo (rps)**

Conversión de unidades:

- Para pasar de rad/s a rps o de rps a rad/s se emplea la expresión: $\omega = 2\pi f$
- Para pasar de rpm a rps se divide por 60
- Para pasar de rps a rpm se multiplica por 60.

Ejemplo: completa la siguiente tabla

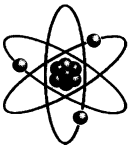
	Rad/s	rps	rpm
a)	π		
b)		2	
c)			15

Solución:

- a) $\omega = 2\pi f \rightarrow f = \omega / 2\pi = 1/2$ Hz $\rightarrow 0.5$ rps $\rightarrow 0.5 \cdot 60 = 30$ rpm
b) $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ rad/s $\rightarrow 2 \cdot 60 = 120$ rpm
c) $15/60 = 0.25$ rps $\rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0.25 = \pi/2$ rad/s

Ejercicio nº 26

Completa la siguiente tabla:



	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Rad/s	$\pi/4$			3π		$3\pi/4$
rps		5			3	
rpm			90			

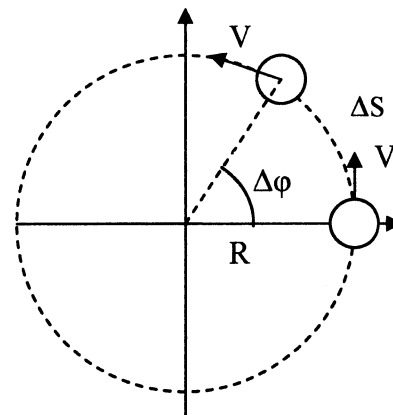
Velocidad en el MCU

Una partícula se desplaza de A a B, recorriendo una distancia ΔS en un tiempo Δt y siendo $\Delta\varphi$ la variación del ángulo descrito por el radio en que se sitúa el móvil.

Si el ángulo se mide en radianes, el espacio recorrido se calcula con la expresión: $\Delta S = \Delta\varphi \cdot R$

Dividiendo por el tiempo Δt :

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} R \rightarrow v = \omega \cdot R$$



Esta expresión relaciona la velocidad lineal del móvil (v) con la velocidad angular (ω) del radio en que se sitúa el móvil.

Ejercicio nº 27

Un móvil que describe un MCU de 4 metros de radio da 4 vueltas por segundo.

Calcula: a) El periodo y la frecuencia; b) La velocidad angular en rad/s; b) La velocidad en m/s

Ejercicio nº 28

Un móvil que describe un MCU de 2'5 metros de radio da 45 vueltas por minuto.

Calcula: a) El periodo y la frecuencia; b) La velocidad angular en rad/s; b) La velocidad en m/s

Ecuación del MCU

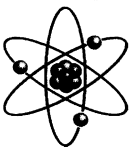
La ecuación del MCU se deduce de la definición de velocidad angular:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \rightarrow \Delta\varphi = \omega \Delta t \rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$$

Obsérvese la analogía entre esta ecuación y al del MRU: $S = S_0 \pm V \cdot (t - t_0)$

Aceleración centrípeta

Un cuerpo sólo puede moverse siguiendo una trayectoria circular si hay una aceleración que le obliga cambiar constantemente la dirección del vector velocidad. Este cambio de

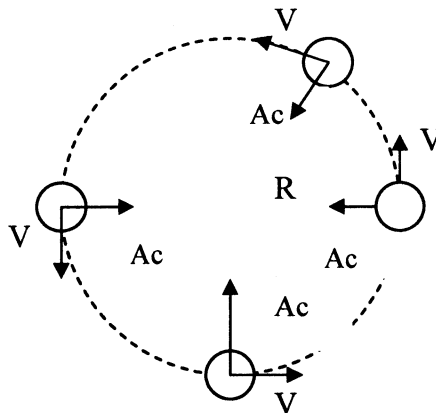


la dirección de la velocidad se mide mediante la **aceleración centrípeta** o aceleración normal, A_c , cuyo valor se puede calcular con la expresión:

$$A_c = \frac{V^2}{R}$$

Siendo V el módulo del vector velocidad y R el radio de la trayectoria circular.

El vector aceleración centrípeta es perpendicular al vector velocidad en cada punto y apunta al centro de la trayectoria circular.



Ejemplo: Una rueda de 0'4 m de radio describe una vuelta completa en 0'2 segundos.

- Calcula la distancia recorrida por un punto de la periferia en este tiempo.
- Calcula la velocidad y la aceleración de dicho punto.

Solución:

- $L = 2\pi R = 2'51 \text{ m}$
- $V = \omega \cdot R$; $\omega = 2\pi / T = 2\pi / 0'2 = 31'4 \text{ rad/s} \rightarrow V = \omega \cdot R = 31'4 \cdot 0'4 = 12'6 \text{ m/s}$
 $A_c = V^2 / R = 12'6^2 / 0'4 = 397 \text{ m/s}^2$

Ejercicio nº 29

Un objeto tiene un movimiento circular uniforme de 2 metros de radio y una frecuencia de 0'5 Hz.

- Calcula la aceleración del objeto;
- Calcula el espacio recorrido en 20 s.

Ejercicio nº 30

Un ciclista da vueltas en un velódromo circular de 55 m de radio con una velocidad constante de 22 km /h.

Calcula: a) La velocidad angular en rad/s; b) La aceleración centrípeta que actúa sobre la bicicleta; c) El tiempo que tarda en dar 4 vueltas.

Ejercicio nº 31

La ecuación de un movimiento circular de 2 metros de radio es: $\alpha = \pi + \pi t/2$

Calcula: a) El ángulo a los 6 segundos; b) La velocidad del móvil; c) La aceleración.