

1. ¿Qué relaciones ligan las razones trigonométricas de $(45^\circ - a)$ y $(45^\circ + a)$

2. ¿Cuál es el valor del cociente de la suma entre la diferencia de los senos de dos ángulos?

$$\cos x = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

3. Demostrar la fórmula:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

4. Expresar $\operatorname{tg} x$ en función de

$$\frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)} = \operatorname{tg} b$$

5. Comprobar que

$$A + B = \frac{\pi}{3}$$

6. Suponiendo que $A + B = \frac{\pi}{3}$, ¿qué es mayor, la suma de los senos o la suma de los cosenos de estos dos ángulos?

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

7. Sabiendo que $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ hallar $\operatorname{sen} x$

8. Transformar en producto la expresión trigonométrica $\cos x + \cos 2x + \cos 3x$

9. Transformar en producto la expresión $1 + \cos x$. Aplicarlo para calcular el $\cos 90^\circ$

10. Conociendo $A=30^\circ$, $B=45^\circ$, $a=1$. Hallar los lados b y c y el ángulo C del triángulo

11. En un triángulo isósceles ABC conocemos el lado $BC=80m$ y el radio de la circunferencia inscrita $r=24m$. Calcular el área del triángulo y los lados iguales.

12. Los lados de un triángulo miden respectivamente 13,14 y 15 cm. Hallar el seno de sus ángulos y el área del triángulo.

13. Hallar el área de un rectángulo sabiendo que una diagonal mide 60m y el ángulo obtuso que determinan sus diagonales es 120° .

14. Dos coches, con velocidades respectivas de 60km/h y 90km/h, toman dos carreteras que se bifurcan con un ángulo de 70° ¿Qué distancia habrá entre ellos a los 10 minutos de viaje?

15. Un viajero parte con una velocidad de 75km/h; a los 10 minutos se da cuenta de que se ha equivocado de carretera y toma otra que forma un ángulo de 130° con la anterior (a la misma velocidad) ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra a los 20 minutos de haber tomado esta segunda carretera?

16. Tres personas están en tres puntos distintos de la orilla de un lago, la primera dista de la segunda 1 km, la segunda de la tercera 1'5km y ésta de la primera 2km ¿Qué ángulos forman entre sí dichas personas? ¿Qué superficie tiene el lago, si ésta es los $\frac{5}{3}$ de la superficie del triángulo que forman las 3 personas?

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS DE LA
RELACIÓN I

1. ¿Qué relaciones ligan las razones trigonométricas de $(45^\circ-a)$ y $(45^\circ+a)$

SOLUCIÓN:

Los ángulos $45^\circ-a$ y $45^\circ+a$ son complementarios [$45^\circ-a+(45^\circ+a) = 90^\circ$] así, pues,

$\begin{aligned}\operatorname{sen}(45^\circ-a) &= \operatorname{cos}(45^\circ+a) \\ \operatorname{cos}(45^\circ-a) &= \operatorname{sen}(45^\circ+a)\end{aligned}$
--

2. ¿Cuál es el valor del cociente de la suma entre la diferencia de los senos de dos ángulos?

SOLUCIÓN:

Usamos las fórmulas de reducción de sumas a productos

$$\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \operatorname{cos} \frac{a-b}{2}}{2 \operatorname{cos} \frac{a+b}{2} \operatorname{sen} \frac{a-b}{2}} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \operatorname{cotg} \frac{a-b}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}$$

$$\operatorname{cos} x = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

3. Demostrar la fórmula:

SOLUCIÓN:

Usamos la fórmula del seno de la suma

$$\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} \frac{\pi}{2} + \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = (\operatorname{sen} x) \cdot 0 + (\operatorname{cos} x) \cdot 1 = \operatorname{cos} x$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

4. Expresar $\operatorname{tg} x$ en función de

SOLUCIÓN:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\alpha = \frac{x}{2}$$

Partimos de la fórmula de la tangente del ángulo doble:

En esta fórmula consideramos

$$2\alpha = \frac{x}{2} \cdot 2 = x$$

(Evidentemente)

Sustituyendo en la fórmula anterior se tiene finalmente:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\frac{\cos(\alpha - b) - \cos(\alpha + b)}{\operatorname{sen}(\alpha - b) + \operatorname{sen}(\alpha + b)} = \operatorname{tg} b$$

5. Comprobar que

SOLUCIÓN:

Utilizamos, en primer lugar, las fórmulas de conversión de sumas y diferencias en productos:

$$\frac{\cos(\alpha - b) - \cos(\alpha + b)}{\operatorname{sen}(\alpha - b) + \operatorname{sen}(\alpha + b)} = \frac{-2 \operatorname{sen} \frac{\alpha - b + (\alpha + b)}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - b - (\alpha + b)}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha - b + (\alpha + b)}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - b - (\alpha + b)}{2}} =$$

$$\frac{\alpha - b + (\alpha + b)}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha \quad \text{y que} \quad \frac{\alpha - b - (\alpha + b)}{2} = \frac{-2b}{2} = -b$$

En este momento podemos utilizar que
expresión considerada queda de la forma:

y que

con lo que tenemos que la

$$= \frac{-2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen}(-b)}{2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos(-b)} = \frac{-\operatorname{sen}(-b)}{\cos(-b)}$$

(donde, además, hemos simplificado)

Ahora podemos recordar las fórmulas de reducción al primer cuadrante y nuestra expresión queda:

$$= \frac{-\operatorname{sen}(-b)}{\cos(-b)} = \frac{-(-\operatorname{sen}b)}{\cos b} = \operatorname{tg}b$$



6. Suponiendo que $A + B = \frac{\pi}{3}$, ¿qué es mayor, la suma de los senos o la suma de los cosenos de estos dos ángulos?

SOLUCIÓN:

Dada la fórmula del enunciado, un ángulo será A y el otro $\frac{\pi}{3} - A$

$$\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B = \operatorname{sen}A + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - A\right) = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right)$$

En esta expresión anterior se ha utilizado la correspondiente fórmula de conversión de sumas en productos teniendo en cuenta:

$$1^\circ) \frac{A + \frac{\pi}{3} - A}{2} = \frac{\pi/3}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$2^\circ) \frac{A - \left(\frac{\pi}{3} - A\right)}{2} = \frac{2A - \frac{\pi}{3}}{2} = A - \frac{\pi}{6}$$

$$3^\circ) \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Razonando de modo análogo al anterior se llega a la conclusión de que

$$\cos A + \cos B = \cos A + \cos\left(\frac{\pi}{3} - A\right) = 2\cos\frac{\pi}{6}\cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donde se ha tenido, además, en cuenta que

Así, pues, hemos llegado a la conclusión de que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B &= \cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right) \\ \cos A + \cos B &= \sqrt{3}\cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Como vemos, estas dos expresiones sólo difieren en el factor raíz de 3. Este factor es mayor que la unidad con lo que hemos de concluir que la segunda expresión es mayor que la primera siempre que ambas sean positivas.



$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

7. Sabiendo que $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ hallar $\operatorname{sen} x$

SOLUCIÓN:

Usamos la fórmula que hemos deducido en el problema 4. (Repasarlo para ver cómo se ha hecho)

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\operatorname{cns}^2 x}$$

Usamos ahora la fórmula en la que despejamos el valor del coseno

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{16}{9}}} = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5}$$

Y, finalmente,

$$\operatorname{sen} x = \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \pm \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} = \pm \frac{4}{5}$$

Nota: Es evidente que el seno puede tener dos valores (positivo y negativo) del mismo modo que el coseno también los puede tener. Esto se debe a que la tangente es positiva tanto en el primer cuadrante como en el tercero.

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

8. Transformar en producto la expresión trigonométrica

SOLUCIÓN:

1° Agrupamos de modo conveniente.

2° Aplicamos las fórmulas de conversión de sumas en productos

3° Aplicamos que $\cos(-x) = \cos x$

4° Sacamos factor común.

$$\begin{aligned} \cos x + \cos 2x + \cos 3x &= \cos 2x + (\cos x + \cos 3x) = \cos 2x + 2 \cos \frac{x+3x}{2} \cos \frac{x-3x}{2} = \\ &= \cos 2x + 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos(-x) = \cos 2x + 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x = \cos 2x (1 + 2 \cos x) \end{aligned}$$

9. Transformar en producto la expresión $1 + \cos x$. Aplicarlo para calcular el $\cos 90^\circ$

SOLUCIÓN:

Camino 1°: Aplicando las fórmulas de transformación en producto:

Artificio: $1 = \cos 0^\circ$

$$1 + \cos x = \cos 0^\circ + \cos x = 2 \cos \frac{0^\circ + x}{2} \cos \frac{0^\circ - x}{2} = 2 \cos \frac{x}{2} \cos \left(-\frac{x}{2} \right) = 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

Camino 2°: Usando las fórmulas del ángulo mitad

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \rightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \rightarrow 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

SOLUCIÓN DEL SEGUNDO APARTADO:

De lo anterior se deduce que :

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \rightarrow \cos 90^\circ = 2 \cos^2 45^\circ - 1 = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

10. Conociendo $A=30^\circ$, $B=45^\circ$, $a=1$. Hallar los lados b y c y el ángulo C del triángulo

INDICACIÓN:

1° Para calcular el ángulo C nos basamos en la suma de los tres ángulos ha de ser 180° . Tenemos así que $C = 105^\circ$

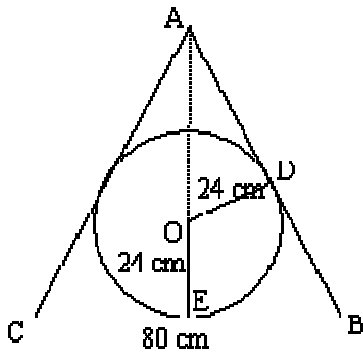
2° Para calcular el lado b aplicamos el teorema de los senos entre A y B .

Tenemos así que $b = \sqrt{2}$

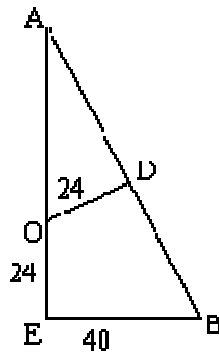
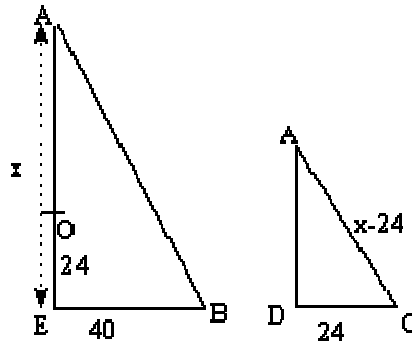
3° Para calcular el lado c , aplicamos el teorema de los senos entre A y C . Para encontrar la expresión numérica exacta,

$$c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

podemos desarrollar $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$. Obtenemos así:

Dibujo 1*(Dibujo 1).*

En el dibujo 2 nos fijamos sólo en los datos que del mismo. Se observa que estamos ante dos triángulos **son semejantes** puesto que:

Dibujo 2**Dibujo 3****SOLUCIÓN:**

En este problema hemos dibujado, en primer lugar, los datos que nos proporciona el enunciado.

van a ayudarnos en la resolución triángulos AEB y ADO. Estos dos

1º **son rectángulos** (el primero lo es en E y el segundo en D, que es el punto de tangencia de una circunferencia - en estos puntos siempre hay perpendicularidad entre la tangente y el radio-)

2º **El ángulo A es común a ambos.**

En el dibujo 3 ponemos de manifiesto esta semejanza entre los dos triángulos (nota: uno de ellos ha "cambiado de posición" para que se observe esta semejanza).

En este mismo dibujo hemos llamado **x** a la altura del primer triángulo (lado AE). Como se observa en el dibujo 2, la longitud de la hipotenusa del segundo triángulo es la misma que la de la altura mencionada menos 24 cm. Es decir, **x-24**. (Como hemos señalado en el lugar correspondiente).

A partir del teorema de Pitágoras aplicado al primer triángulo, podemos calcular el lado AB en función de **x**

$$h = \sqrt{40^2 + x^2}$$

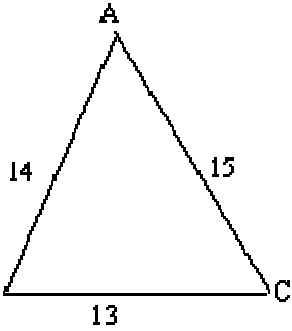
Aplicamos, ahora, el teorema de Tales:

$$\frac{\text{cateto menor } 1^\circ \text{ triángulo}}{\text{cateto menor } 2^\circ \text{ triángulo}} = \frac{\text{hipotenusa } 1^\circ \text{ triángulo}}{\text{hipotenusa } 2^\circ \text{ triángulo}}$$

Es decir, en nuestro problema:

$$\frac{40}{24} = \frac{\sqrt{40^2 + x^2}}{x - 24}$$

En esta proporción podemos simplificar y elevar al cuadrado:



$$\frac{5}{3} = \frac{\sqrt{40^2 + x^2}}{x - 24} \rightarrow \frac{5^2}{3^2} = \frac{40^2 + x^2}{x - 24}$$

Hacemos las operaciones pertinentes tras multiplicar en cruz:

Problema 12

$$25x^2 - 48 \cdot 25x + 24^2 \cdot 25 = 9 \cdot 40^2 + 9x^2$$

Reagrupamos en el primer miembro y hacemos operaciones:

$$16x^2 - 1200x = 0 \rightarrow x(16x - 1200) = 0$$

En esta última ecuación hay dos soluciones:

$$x = 0 \text{ (que no tiene sentido en nuestro problema)}$$

$$16x - 1200 = 0 \text{ (es decir, } x = 75 \text{ cm.)}$$

La hipotenusa del primer triángulo de la figura 3 es: **85 cm** aplicando el valor calculado por Pitágoras para **h** anteriormente.

Es decir, en el triángulo isósceles del problema los lados iguales miden 85 cm por coincidir con la hipotenusa antes calculada. La altura (a la que hemos llamado **x** mide **75 cm**. Finalmente hemos de calcular el área del triángulo dado.

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{80 \cdot 75}{2} = 3.000 \text{ m}^2$$

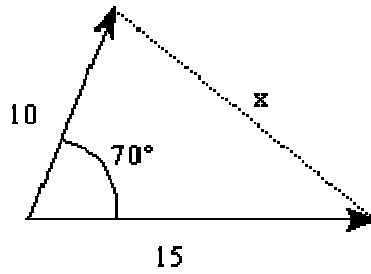
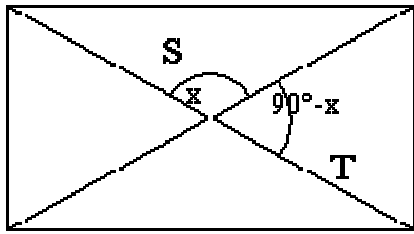
12. Los lados de un triángulo miden respectivamente 13,14 y 15 cm. Hallar el seno de sus ángulos y el área del triángulo.

INDICACIONES:

1º Cálculo del seno del ángulo **A**: teorema del coseno aplicado sobre el lado **A**. Valor calculado para el $\text{sen}A = 4/5$.

2º Cálculo del seno del ángulo **C**: teorema de los senos aplicado entre **A** y **C**. Valor calculado para el $\text{sen}C = 56/65$.

3º Cálculo del seno del ángulo **B**: teorema de los senos aplicado entre **A** y **B**. Valor calculado para $\text{sen}B = 12/13$.



4º Área: Usando la fórmula

$$A_T = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \text{sen}A = \frac{14 \cdot 15}{2} \text{sen}A = 84 \text{cm}^2$$

Problema 14

13. Hallar el área de un rectángulo sabiendo que una diagonal mide 60m y el ángulo obtuso que determinan sus diagonales es 120°.

INDICACIONES:

Vamos a demostrar que en cualquier rectángulo los triángulos S y T tienen siempre la misma superficie.

Es conocido el hecho de que las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio. Así, pues:

$$A_S = \frac{\frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2}}{2} \cdot \text{sen}x = \frac{d^2}{8} \text{sen}x$$

$$A_T = \frac{\frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2}}{2} \cdot \text{sen}(180^\circ - x) = \frac{d^2}{8} \text{sen}(180^\circ - x) = \frac{d^2}{8} \text{sen}x$$

por otra parte:

Es decir, que los 4 triángulos en que se descompone un rectángulo por el corte de sus diagonales son iguales.

Basta, entonces, calcular el área de uno de esos triángulos (utilizando la misma fórmula del área del triángulo en la que interviene el seno) y multiplicar por 4.

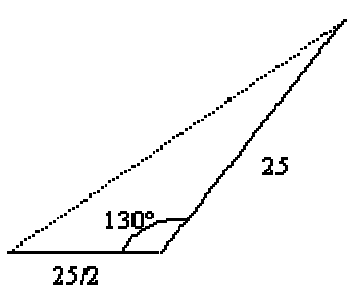
$$A = 900\sqrt{3} \text{m}^2$$

En nuestro caso, el área del rectángulo es

14. Dos coches, con velocidades respectivas de 60km/h y 90km/h, toman dos carreteras que se bifurcan con un ángulo de 70° ¿Qué distancia habrá entre ellos a los 10 minutos de viaje?

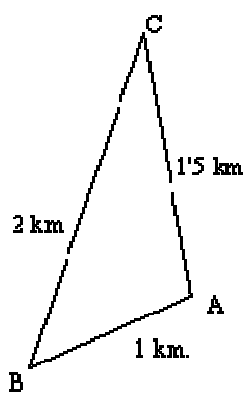
SOLUCIÓN:

En 10 minutos, el primer móvil



Problema 15

coseno se puede



Problema 16

habrá recorrido $(1/6)60 = 10\text{Km}$

En 10 minutos, el segundo móvil habrá recorrido $(1/6)90 = 15\text{Km}$

Se forma, entonces un triángulo como el de la figura. Por el teorema del calcular la x y se tiene $x = 14'9128 \text{ Km}$

15. Un viajero parte con una velocidad de 75km/h ; a los 10 minutos se da cuenta de que se ha equivocado de carretera y toma otra que forma un ángulo de 130° con la anterior (a la misma velocidad) ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra a los 20 minutos de haber tomado esta segunda carretera?

SOLUCIÓN:

Como en el problema anterior, pasamos las velocidades y tiempos a distancias recorridas.

En el primer tramo, la sexta parte de una hora, habrá recorrido $25/2 \text{ Km}$.

En el segundo, la tercera parte de una hora, 25 Km . (Ver el dibujo)

Aplicamos el teorema del coseno. La distancia pedida es $34'39 \text{ Km}$.

16. Tres personas están en tres puntos distintos de la orilla de un lago, la primera dista de la segunda 1 km , la segunda de la tercera 1.5km y ésta de la primera 2km ¿Qué ángulos forman entre sí dichas personas? ¿Qué superficie tiene el lago, si ésta es los $5/3$ de la superficie del triángulo que forman las 3 personas?

SOLUCIÓN:

El ángulo A se calcula mediante el teorema del coseno. El valor de A , así calculado, es de $A=104^\circ28'39''$

El ángulo B se calcula, ahora, estableciendo el teorema de los senos entre A y B . El valor de B es $46^\circ34'2''$.

El valor de C se calcula haciendo uso de que los ángulos de un triángulo han de sumar 180° . Se tiene que $C = 28^\circ 57' 19''$

El área del triángulo se calcula haciendo uso de las longitudes de los lados b y c y del $\text{sen}A$. El valor de la superficie el triángulo es $0'7261\text{Km}^2$

Finalmente, el área del lago ($5/3$ de la del triángulo) es de $1'2103\text{Km}^2$

