1.- $sen x + \cos 2x = 1$

2.- $\cos^2 x = \cos x$

3.- $2\cos x = \sec x$

4.- $3tg^2 x = \sec^2 x + 1$

5.- $\cos 2x + 5\cos^2 x = 5$

6.- $\cos x - sen x = sen 3x$

7.- $\cos 2x + 6\cos^2 x = 1 \quad (0 \leq x < 360°)$

8.- $\cos x + sen^2 \frac{x}{2} = 1$

9.- $\cos x - sen 2x = 0$

10.- $sen 3x = 2 sen x$

11.- $1 = 2 sen x + 3\cos x$

SISTEMAS DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1.- $\begin{cases} 0'5 = \cos x \cos y \\ 0'3 = sen x \, sen y \end{cases} \quad x, y \in [0, 90°]$

2.- $\begin{cases} sen x + sen y = 1 \\ 2(x + y) = \pi \end{cases}$

3.- $\begin{cases} \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 0 \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

SOLUCIONES

1.- $\operatorname{sen} x + \cos 2x = 1$

SOLUCIÓN:

Por el coseno del ángulo doble: $\operatorname{sen} x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1$

Por la fórm. fundamental: $\operatorname{sen} x + 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1$

Operando: $\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^2 x = 0$

Sacando factor común: $\operatorname{sen} x(1 - 2\operatorname{sen} x) = 0$

<u>Posibilidades y resultados:</u>

a) $\operatorname{sen} x = 0 \qquad x = 0 \pm k\pi$

b) $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \qquad x = \dfrac{\pi}{6} \pm 2k\pi$

$x - \dfrac{5\pi}{6} \pm 2k\pi$ (Por ser suplementario del anterior)

2.- $\cos^2 x = \cos x$

SOLUCIÓN:

Reagrupando y sacando factor común: $\cos x(\cos x - 1) = 0$

Posibilidades y resultados:

a) $\cos x = 0$ $\quad x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$

b) $\cos x = 1$ $\quad x = 0 \pm 2k\pi$

3.- $2\cos x = \sec x$

SOLUCIÓN:

Aplicando el valor de la secante: $2\cos x = \frac{1}{\cos x}$

Reagrupando: $2\cos^2 x = 1$

Sacando raíces: $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Posibilidades y resultados:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = \frac{\pi}{4} \pm 2k\pi$

$x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ (Por que los ángulos que difieren 360º tienen el mismo coseno)

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{5\pi}{4} \pm 2k\pi$ (Por la razón anterior)

En resumen, *y sólo en este caso*, podemos reunir las cuatro soluciones anteriores en la expresión siguiente: $x = \frac{\pi}{4} \pm k\frac{\pi}{2}$

4.- $3tg^2 x = \sec^2 x + 1$

SOLUCIÓN:

Aplicando definiciones: $3\frac{sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + 1$

Quitando denominadores: $3sen^2 x = 1 + \cos^2 x$ (En el resultado, habrá que controlar si se han introducido soluciones "extrañas" a la ecuación, puesto que hemos multiplicado por una función en ambos miembros)

Ecuación fund. trigon. $3sen^2 x = 1 + 1 - sen^2 x$

Reagrupando: $4sen^2 x = 2$

Despejando: $senx = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Las soluciones, como en el caso anterior (*se puede comprobar*) corresponden, una vez agrupadas, a $x = \frac{\pi}{4} \pm k\frac{\pi}{2}$

Igualmente se puede comprobar que no se han introducido soluciones extrañas.

Otra forma de resolver la misma ecuación:

$$3tg^2x = \sec^2x + 1$$

Sumando y restando 3: $3tg^2x + 3 - 3 = \sec^2x + 1$

Sacando factor común: $3(tg^2x + 1) - 3 = \sec^2x + 1$

Aplicando otra fórm. fundamental: $3\sec^2x - 3 = \sec^2x + 1$

Reagrupando: $2\sec^2x = 4$

Despejando: $\sec^2x = 2$

Calculando inversos en ambos miembros: $\cos^2x - \frac{1}{2}$

Despejando: $\cos x - \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Es evidente que esta ecuación tiene las mismas soluciones que usando el otro camino (ver problema anterior)

5.- $\cos 2x + 5\cos^2 x = 5$

SOLUCIÓN:

Valor del coseno de 2x: $\cos^2 x - sen^2 x + 5\cos^2 x = 5$

Reagrupando y "abriendo" el sen: $6\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 5$

Reagrupando: $7\cos^2 x = 6$

Despejando: $\cos x = \pm\sqrt{\frac{6}{7}}$

Solución 1: $22'2076^{\circ} \pm 2k\pi$

Solución 2: $-22'2076^{\circ} \pm 2k\pi$

Solución 3: $157'792345^{\circ} \pm 2k\pi$

Solución 4: $-157'792345^{\circ} \pm 2k\pi$

6.- $\cos x - sen x = sen 3x$

SOLUCIÓN:

Pasando ***senx*** al otro miembro: $\cos x = sen3x + senx$

Transformando el segundo miembro en producto:

$$\cos x = sen3x + senx = 2sen\frac{3x-x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 2sen(2x)\cdot\cos x$$

Simplificando: $\cos x = 2sen(2x)\cdot\cos x \rightarrow 1 = 2sen2x$ (En este punto conviene que tengamos en cuenta que hemos podido eliminar las soluciones que sean ***cosx=0***)

Despejando: $sen2x = \frac{1}{2}$

Esta ecuación tiene por soluciones:

Solución 1: $2x = \frac{\pi}{6} \pm 2k\pi \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{\pi}{12} \pm k\pi}$

Solución 2: $2x = \frac{5\pi}{6} \pm 2k\pi \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{5\pi}{12} \pm k\pi}$

Solución 3: Ahora debemos comprobar si las soluciones de cosx=0 son tambièn soluciones de nuestra ecuación.

1) Si consideramos $x = \frac{\pi}{2}$ tenemos:

$\cos\frac{\pi}{2} - sen\frac{\pi}{2} = sen\frac{3\pi}{2} \rightarrow 0 - 1 = -1$ (lo cual es cierto)

2) Si consideramos $x = \frac{3\pi}{2}$ tenemos:

$$\cos\frac{3\pi}{2}-sen\frac{3\pi}{2}=sen\frac{9\pi}{2} \rightarrow 0-(-1)=1$$

(lo cual es también es cierto)

Por todo locual, estas dos últimas soluciones lo son también de la ecuación dada.

7.- $\cos 2x+6\cos^2 x=1 \ (0\leq x<360°)$

SOLUCIÓN:

Valor de coseno 2x: $\cos^2 x-sen^2 x+6\cos^2 x=1$

"Abriendo el coseno": $1-sen^2 x-sen^2 x+6(1-sen^2 x)=1$

Operando: $6-8sen^2 x=0$

Despejando: $sen^2 x=\frac{3}{4}$

Despejando: $senx=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución 1: $x=\frac{\pi}{3}$

Solución 2: $x=\frac{2\pi}{3}$ (Ángulos suplementarios)

Solución 3: $x = \frac{4\pi}{3}$

Solución 4: $x = \frac{5\pi}{3}$ (Ángulos suplementarios)

(No hace falta poner los ángulos que difieran vueltas completas puesto que el enunciado, precisamente, hace referencia a que las soluciones pertenezcan a la "primera vuelta")

8.- $\cos x + sen^2 \frac{x}{2} = 1$

SOLUCIÓN:

Aplicando "seno del ángulo mitad": $\cos x + \frac{1 \quad \cos x}{2} = 1$

Quitando denominadores: $2\cos x + 1 - \cos x = 2$

Operando: $\cos x = 1$

Solución única: $x = 0 \pm 2k\pi$

9.- $\cos x - sen 2x = 0$

SOLUCIÓN:

Aplicando "seno del ángulo doble": $\cos x - 2 sen x \cos x = 0$

Sacando factor común: $\cos x(1 - 2 sen x) = 0$

Tenemos ahora dos números cuyo producto es 0. Uno de ellos, al menos, debe ser cero, es decir:

Solución 1: $\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$

Solución 2: $1 - 2\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} \pm 2k\pi \; ; \; x_2 = \frac{5\pi}{6} \pm 2k\pi$

10.- $\operatorname{sen} 3x = 2\operatorname{sen} x$

SOLUCIÓN:

Un posible camino para esta ecuación consiste en aplicar de una manera ingeniosa las fórmulas de conversión a productos. (Por supuesto, siempre podemos "abrir el ***sen(3x)***")

Preparamos para utilizar la fórmula: $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \rightarrow \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$

Aplicamos la fórmula de conversión de la diferencia de senos en producto:

$$2\cos\frac{3x+x}{2}\operatorname{sen}\frac{3x-x}{2} = \operatorname{sen} x \rightarrow 2\cdot\cos 2x\cdot\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

Dividimos por senx $2\cdot\cos 2x = 0$ (Habrá que tener en cuenta las soluciones de ***sen x = 0***)

Solución 1: $\cos 2x = 0 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm k\frac{\pi}{2}$

Solución 2: $\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0 \pm k\pi$

11.- $1 = 2senx + 3cosx$

PROCEDIMIENTO GENERAL:

En las ecuaciones de la forma $1 = asenx + bcosx$ vamos a dividir siempre por $\sqrt{a^2+b^2}$ (Expresión que recuerda al módulo de un vector)

De esta forma obtendremos $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}senx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx$

Utilizaremos en este punto un *ángulo auxiliar* de modo que

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \; ; \; sen\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(Evidentemente, este ángulo auxiliar siempre va a existir, puesto que basta aplicarle la ecuación fundamental de la trigonometría para comprobar que la cumple con los valores propuestos).

Sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}senx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha senx + sen\alpha cosx$$

Es decir:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha senx + sen\alpha cosx \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = sen(\alpha + x)$$

Y esta última ecuación es muy fácil de resolver.

SOLUCIÓN:

En nuestro caso, $1 = 2senx + 3cosx$; hemos de dividir por $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

Dividiendo por el *módulo*: $\frac{1}{\sqrt{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}senx+\frac{3}{\sqrt{13}}cosx$

El *ángulo auxiliar* en nuestro caso es aquel que cumple

$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$; $sen\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$, es decir, $\alpha=56'31°$

Sustituyendo en la ecuación $\frac{1}{\sqrt{13}}=\cos\alpha senx+sen\alpha cosx$

Aplicando el seno de la suma: $\frac{1}{\sqrt{13}}=sen(\alpha+x)$

De aquí tenemos que:

Solución 1: $\alpha+x=16'1021°\pm2k\pi \rightarrow x=-40'2079°\pm2k\pi=\boldsymbol{319'7921°\pm2k\pi}$

Solución 2: $\alpha+x=(180°-16'1021°)\pm2k\pi \rightarrow x=163'8979°-56'31°\pm2k\pi=\boldsymbol{107'5879°\pm2k\pi}$

1.- $\begin{cases}0'5=cosxcosy\\0'3=senxseny\end{cases}$ $x\ y\in[0,90°]$

SOLUCIÓN:

Sumando las dos ecuaciones obtenemos: $0'8=cosxcosy+senxseny$

Restando las dos ecuaciones: $0'2=cosxcosy-senxseny$

(Estas dos ecuaciones forman un sistema equivalente al anterior).

Aplicando coseno de la diferencia: $0'8 = \cos(x - y)$

Aplicando coseno de la suma: $0'2 = \cos(x + y)$

De donde $x - y = 36'8699°$

Además $x + y = 78'4631°$

Resolviendo este sistema: x = 57'6665° ; y = 20.7966°, es decir:

x = 57°39'59" ; y = 20°47'48"

2.- $\begin{cases} senx + seny = 1 \\ 2(x + y) = \pi \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Despejamos en la segunda ecuación: $y = \frac{\pi}{2} - x$

Sustituimos en la primera: $senx + sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1$

Desarrollamos en la ec. anterior: $senx + sen\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}senx = 1$

Es decir: *senx+cosx=1*

Para resolver esta ecuación podemos recurrir al siguiente artificio. Nos basamos en que el coseno de un ángulo es igual al seno de 90°+x. De esta forma, la ecuación queda:

senx + sen (90°+x) = 1

Transformando en producto la suma de senos:

$$2sen\frac{90^\circ+x+x}{2}\cos\frac{90^\circ+x-x}{2}=1$$

Haciendo operaciones:

$$2sen(45^\circ+x)\cos 45^\circ=1 \rightarrow 2sen(45^\circ+x)\frac{\sqrt{2}}{2}=1 \rightarrow sen(45^\circ+x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Con esto tenemos:

$$45^\circ+x=45^\circ\pm 2k\pi \rightarrow x=0\pm 2k\pi \rightarrow y=\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi$$

También tenemos:

$$45^\circ+x=135^\circ\pm 2k\pi \rightarrow x=\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi \rightarrow y=0\pm 2k\pi$$

(Como se deducía logicamente de la "simetría" del sistema original)