1 Operaciones con potencias.

Este tipo de ejercicios hace referencia a operaciones con potencias en los que hay que calcular el resultado final que se obtiene al realizar las operaciones indicadas, para ello debemos aplicar las propiedades de las potencias (apartado 2 de teoría general).

Para resolver este tipo de ejercicios seguiremos los siguientes **pasos**:

1. **Descomponer las bases de las potencias en producto de factores.**

   Si la base es un número la descompondremos en sus factores primos.

   Ejemplo: Calcular $\left(8^{\frac{12}{15}}\right)^{\frac{15}{6}} + 4^2$

   Descomponemos en producto de factores primos la base 8:

   $$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

   Así: $8 = 2^3$ y $4 = 2^2$.

   Sustituyendo en la expresión inicial:

   $$\left(\left(2^3\right)^{\frac{12}{15}}\right)^{\frac{15}{6}} + \left(2^2\right)^2$$

2. **Aplicar las propiedades de las potencias.**

   Se trata de aplicar las propiedades de las potencias hasta que **cada** potencia tenga un único exponente.

   En el **ejemplo:**

   - En el primer sumando, dentro del paréntesis externo, tenemos una potencia elevada a otra potencia, por lo tanto aplicamos la potencia de una potencia:

     $$\left(\left(2^3\right)^{\frac{12}{15}}\right)^{\frac{15}{6}} = \left(2^{\frac{36}{15}}\right)^{\frac{15}{6}}$$

     Volvemos a aplicar la misma propiedad:

     $$\left(2^{\frac{36}{15}}\right)^{\frac{15}{6}} = 2^{\frac{540}{90}} = 2^6 = 64$$

   - En el segundo sumando aplicamos igualmente la potencia de una potencia:

     $$(2^2)^2 = 2^4 = 16$$

3. **Realizar las operaciones indicadas.**

   $$\left(\left(2^3\right)^{\frac{12}{15}}\right)^{\frac{15}{6}} + \left(2^2\right)^2 = 64 + 16 = 80$$

3 Ecuaciones exponenciales sencillas

Este tipo de ejercicios hace referencia a ecuaciones con **un único término en cada miembro** de la igualdad, y donde la incógnita aparece en **uno** de los **exponentes**.

Para resolver este tipo de ejercicios efectuaremos los siguientes **pasos**:

1. **Descomponer las bases en el producto de sus factores primos.**

   El propósito de este paso es **obtener una igualad entre dos potencias de la misma base** en la que en la potencia que contiene a la incógnita aparezca despejada.

   Por lo tanto, antes de descomponer las bases convendrá despejar la potencia que contiene a la incógnita.

   Una vez despejada dicha potencia descompondremos las **bases** de ambos términos de la ecuación en el producto de sus factores primos.

   Ejemplo: **Resolver** $3\cdot 2^{x+1} = 768$

   En primer lugar despejamos la potencia que contiene a la incógnita:

   $$3\cdot 2^{x+1} = 768 \Rightarrow 2^{x+1} = 768/3 = 256$$

   Por tanto debemos resolver la ecuación:

   $$2^{x+1} = 256$$

   Las bases que debemos descomponer son **2** y **256** (256 puede considerarse como una potencia de exponente 1: $256 = 256^1$).

   Como **2** es un número primo no puede descomponerse más por lo tanto descomponemos la otra base:

   $$\begin{array}{r|l} 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

   Así: $256 = 2^8$

   Sustituyendo en la ecuación: $2^{x+1} = 256$

   $$2^{x+1} = 2^8$$

2. **Igualar los exponentes y resolver la ecuación resultante.**

   Según hemos indicado, en el paso anterior obtenemos una igualdad entre dos potencias de la misma base.

   Sabemos que si dos potencias de la misma base son iguales sus exponentes deben ser también iguales.

   Por lo tanto podemos igualar los exponentes de las potencias de la igualdad del paso anterior.

   Así en el ejemplo:

   $$2^{x+1} = 2^8 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 8$$

   Resolvemos la ecuación de primer grado:

   $$x = 8 - 1 = 7$$

4 Ecuaciones exponenciales con varios términos que contienen a la incógnita

Este tipo de ejercicios hace referencia a ecuaciones exponenciales en las que:

- La incógnita aparece en el exponente de más de un término de la ecuación.
- Todos los términos que contienen a la incógnita pueden expresarse como potencias de la misma base.

Para resolver este tipo de ejercicios efectuaremos los siguientes **pasos**:

1. **Expresar todas las potencias que contienen a la incógnita en la misma base.**

   El objetivo de este paso es que todas las potencias que contengan a la incógnita tengan la **misma BASE.**

   Para lograrlo, si las **bases** son distintas deberemos descomponerlas en producto de factores.

   Ejemplo: **Resolver** $-3^{x-1} + 9^{x} = -1 + 3^{x+1}$

   En el ejemplo tenemos tres potencias que contienen a la incógnita. La base de dos de estas potencias es 3 y la de la otra es 9.

   La primera base (3) no puede descomponerse ya que es un número primo sin embargo, la segunda (9) si que podemos descomponerla:

   $$9 = 3^{2}$$

   Sustituyendo en la ecuación obtenemos:

   $$-3^{x-1} + (3^{2})^{x} = -1 + 3^{x+1}$$

2. **Descomponer las potencias que contienen a la incógnita.**

   El objetivo de este **paso** es que el exponente de las **potencias que contienen a la incógnita** sea la propia **incógnita (x).**

   Para conseguir dicho objetivo deberemos descomponer cada **POTENCIA** (no sus bases) que contenga a la incógnita en cociente de potencias, producto de potencias o en potencia de potencia.

   Para ello será preciso aplicar las propiedades de las operaciones con potencias:

   - El producto de dos potencias de la misma base es otra potencia de base igual a la base dada y cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

Esta propiedad nos permite expresar **una potencia** cuyo exponente sea una suma (a^{b+c}) como el producto de **dos potencias** de la misma base ($a^{b \cdot c}$).

En el ejemplo, el exponente de la potencia 3^{x+1} es una suma, por lo tanto:

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3^1 = 3^x \cdot 3$$

- El cociente de dos potencias de la misma base es otra potencia de base igual a la base dada y cuyo exponente es igual a la diferencia de los exponentes:

$$a^b : a^c = a^{b-c}$$

Esta propiedad nos permite expresar **una potenci**a cuyo exponente sea una diferencia (a^{b-c}) como el cociente de **dos potencias** de la misma base ($a^b : a^c$).

En el ejemplo el exponente de la potencia 3^{x-1} es una resta, por lo tanto:

$$3^{x-1} = \frac{3^x}{3}$$

- Una potencia elevada a otro exponente (potencia de potencia) es otra potencia de base igual a la base dada y cuyo exponente es igual al producto de los exponentes.

$$(a^b)^c = (a^c)^b = a^{b \cdot c}$$

Esta propiedad nos permite expresar **una potencia** cuyo exponente es un producto ($a^{b \cdot c}$) como **potencia de potencia** ($(a^c)^d$ ó $(a^b)^c$) y además cambiar el orden en el que están expresados los exponentes ($(a^b)^c = (a^c)^b$).

En las ecuaciones de este tipo la **incógnita la expresaremos siempre en el exponente interno**.

En el ejemplo, en la potencia $(3^2)^x$ la incógnita está en el exponente externo por lo tanto aplicamos la propiedad anterior:

$$(3^2)^x = (3^x)^2$$

Por lo tanto, al descomponer cada potencia cuyo exponente contiene a la incógnita en una multiplicación, división o potencia obtenemos:

$$-3^{x-1} + \left(3^2\right)^x = -1 + 3^{x+1} \Rightarrow -\frac{3^x}{3} + \left(3^x\right)^2 = -1 + 3^x \cdot 3$$

3. **Cambiar de incógnita y resolver la ecuación resultante.**

En este **paso** todas las **potencias que contienen a la incógnita** tienen la **misma base** elevada al exponente **x**.

Para poder resolver la ecuación debemos cambiar la incógnita que tenemos que calcular (normalmente **x**) por una nueva incógnita (normalmente **y**). El cambio de incógnita es el siguiente:

$$\text{base}^{x} = y$$

Al efectuar este cambio obtendremos una ecuación lineal o de segundo grado que resolveremos por los métodos habituales ya conocidos.

En el **ejemplo** el cambio es el siguiente:

$$3^x = y \Rightarrow (3^x)^2 = y^2$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$-\frac{3^x}{3} + \left(3^x\right)^2 = -1 + 3^x \cdot 3 \Rightarrow -\frac{y}{3} + y^2 = -1 + y \cdot 3$$

Suprimimos denominadores y pasamos todos los términos al primer miembro:

$$-y \ + 3y^2 = -3 + 9y \Rightarrow -y + 3y^2 + 3 - 9y = 0 \Rightarrow$$

$$3y^2 - 10y + 3 = 0$$

Para resolver la ecuación de segundo grado aplicamos:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow y_1 = 3, \ y_2 = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto hemos obtenido dos valores de y.

4. **Deshacer el cambio de incógnita.**

En el **paso** anterior hemos efectuado un cambio de incógnita y hemos resuelto la ecuación resultante, calculando así el valor de la nueva incógnita (y).

En este paso tenemos que calcular el valor de la primera incógnita (**x**) utilizando para ello la expresión del cambio de incógnita.

Sustituimos en la expresión del cambio de incógnita ($3^x = y$) cada valor calculado de **y**:

- Para $y_1 = 3 \Rightarrow \quad 3^x = y \Rightarrow 3^x = 3$

- Para $y_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = y \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1} = 3^{-1}$

En el último paso hemos aplicado la siguiente propiedad de las potencias:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n},\ n > 0$$

Ahora tenemos dos ecuaciones exponenciales sencillas que ya sabemos resolver, realizamos los siguientes **pasos**:

1. **Descomponer las bases en el producto de sus factores primos.**

   Debemos resolver las dos ecuaciones que hemos obtenido:

   PRIMERA ECUACIÓN

   Como **3** es primo no hay que descomponerlo:

   $$3^x = 3$$

   Tenemos una igualdad entre potencias de la misma base.

   SEGUNDA ECUACIÓN

   La base también es 3 por lo tanto tampoco hay que descomponerla:

   $$3^x = 3^{-1}$$

2. **Igualar los exponentes y resolver la ecuación resultante.**

   PRIMERA ECUACIÓN

   Si dos potencias de la misma base son iguales sus exponentes deben ser también iguales.

   Por lo tanto podemos igualar los exponentes de las potencias de la igualdad del paso anterior:

   $$3^x = 3 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1$$

   SEGUNDA ECUACIÓN

   Igualamos los exponentes de la igualdad $3^x = 3^{-1}$

   $$x = -1$$

Por lo tanto la ecuación exponencial inicial $-3^{x-1} + 9^x = -1 + 3^{x+1}$ tiene dos soluciones: $\mathbf{x = 1}$, $\mathbf{x = -1}$.

5 Sistemas de ecuaciones exponenciales

Este tipo de ejercicios hace referencia a sistemas de dos ecuaciones exponenciales con dos incógnitas.

Para resolver este tipo de ejercicios efectuaremos los siguientes **pasos**:

1. Expresar las potencias que contienen la misma incógnita en la misma base.

El objetivo de este paso es que las potencias que contengan a la **misma INCÓGNITA** tengan la **misma BASE.**

Para lograrlo, si las **bases** son distintas deberemos descomponerlas en producto de factores.

En este nivel, en la mayoría de ejercicios de este tipo que se le plantean al alumno, las potencias cuyos exponentes contienen a las mismas incógnitas tienen **ya** las mismas bases en el sistema inicial dado.

En consecuencia no suele ser necesario aplicar este paso, a pesar de lo cual lo incluimos en este proceso de resolución para que, en el caso de que **sí** sea preciso aplicarlo, pueda ser tomado de ejemplo.

Ejemplo: **Resolver** $\begin{cases} 4^x - 2 \cdot 3^y = 10 \\ 2^x + 3^y = 7 \end{cases}$

En el ejemplo las potencias que contienen a la incógnita **y** tienen la misma base (3) sin embargo las potencias que contienen a la incógnita **x** tienen bases distintas (4 en la primera ecuación y 2 en la segunda) por lo tanto descomponemos estas últimas bases.

La base 2 es un número primo por lo que no puede descomponerse más. Descomponemos la base 4:

$$4 = 2^2$$

Sustituyendo en la potencia que contiene a la incógnita:

$$4^x = (2^2)^x$$

Sustituyendo esta expresión en el sistema obtenemos:

$$\begin{cases} (2^2)^x - 6 \cdot 3^{y-1} = 10 \\ 2^x + 3^y = 7 \end{cases}$$

2. Descomponer las potencias que contegan alguna de las incógnitas.

El objetivo de este **paso** es que las **potencias que contengan a la MISMA incógnita** tengan el mismo exponente **(x** ó **y).**

En consecuencia, al finalizar los dos primeros pasos, las potencias que contengan a la **misma incógnita** deberán tener la **misma base y el mismo exponente**.

Para conseguir dicho objetivo deberemos descomponer las **POTENCIAS** (no sus bases) que contengan alguna de las incógnitas en cociente de potencias, producto de potencias o en potencia de potencia.

Para ello será preciso aplicar las propiedades de las operaciones con potencias:

- El producto de dos potencias de la misma base es otra potencia de base igual a la base dada y cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes:

  $$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

  Esta propiedad nos permite expresar **una potencia** cuyo exponente sea una suma (a^{b+c}) como el producto de **dos potencias** de la misma base ($a^b \cdot a^c$).

  En el ejemplo no hay ninguna potencia cuyo exponente sea una suma.

- El cociente de dos potencias de la misma base es otra potencia de base igual a la base dada y cuyo exponente es igual a la diferencia de los exponentes:

  $$a^b : a^c = a^{b-c}$$

  Esta propiedad nos permite expresar **una potencia** cuyo exponente sea una diferencia (a^{b-c}) como el cociente de **dos potencias** de la misma base ($a^b : a^c$).

  En el ejemplo el exponente de la potencia 3^{y-1} es una resta, por lo tanto:

  $$3^{y-1} = \frac{3^y}{3}$$

- Una potencia elevada a otro exponente (potencia de potencia) es otra potencia de base igual a la base dada y cuyo exponente es igual al producto de los exponentes.

  $$(a^b)^c = (a^c)^b = a^{b \cdot c}$$

  Esta propiedad nos permite expresar **una potencia** cuyo exponente es un producto ($a^{b \cdot c}$) como **potencia de potencia** ($(a^c)^d$ ó $(a^b)^c$) y además cambiar el orden en el que están expresados los exponentes ($(a^b)^c = (a^c)^b$).
  En las ecuaciones de este tipo la **incógnita la expresaremos siempre en el exponente interno.**

  En el ejemplo, en la potencia $(3^2)^x$ la incógnita está en el exponente externo por lo tanto aplicamos la propiedad anterior:

  $$(2^2)^x = (2^x)^2$$

Por lo tanto, al descomponer las potencias cuyos exponentes contienen alguna de las incógnitas en una multiplicación, división o potencia obtenemos:

$$\begin{cases} (2^x)^2 - 6 \cdot \dfrac{3^y}{3} = 10 \\ 2^x + 3^y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2^x)^2 - 2 \cdot 3^y = 10 \\ 2^x + 3^y = 7 \end{cases}$$

3. Cambiar de incógnitas.

Se trata de sustituir las **potencias que contienen a la incógnitas x e y** por otras incógnitas **z** y **t** de forma que obtengamos un sistema de dos ecuaciones sin potencias.

Para poder resolver el sistema debemos cambiar las incógnitas que tenemos que calcular (normalmente **x** e **y**) por nuevas incógnitas (**z, t**). Los cambios de incógnitas son los siguientes:

- $base_1^{\,x} = z$
- $base_2^{\,y} = t$

Al efectuar estos cambios obtendremos un sistema de ecuaciones de primer y/o segundo grado que resolveremos por los métodos habituales ya conocidos.

En nuestro **ejemplo** hacemos el cambio de incógnitas:

$$base_1^{\,x} = z \Rightarrow \mathbf{2^x = z}$$
$$base_2^{\,y} = t \Rightarrow \mathbf{3^y = t}$$

Así obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} z^2 - 2t = 10 \\ z + t = 7 \end{cases}$$

4. Resolver el sistema resultante.

En este **paso** obtendremos un sistema de ecuaciones de primer o segundo grado (en la mayoría de los caso de primer grado).

Para resolver el sistema anterior multiplicamos por dos la segunda ecuación y sumamos la ecuación resultante con la primera:

$$\begin{cases} z^2 - 2t = 10 \\ (z + t = 7)\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 - 2t = 10 \\ 2z + 2t = 14 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones resultantes obtenemos:

$$\begin{array}{r} z^2 - 2t = 10 \\ 2z + 2t = 14 \\ \hline z^2 + 2z + 0 = 24 \end{array}$$

Obtenemos una ecuación de segundo grado. Pasamos el término independiente al primer miembro y aplicamos la de fórmula de resolución de las ecuaciones de segundo grado.

3. Cambiar de incógnitas.

Se trata de sustituir las **potencias que contienen a la incógnitas x** e **y** por otras incógnitas **z** y **t** de forma que obtengamos un sistema de dos ecuaciones sin potencias.

Para poder resolver el sistema debemos cambiar las incógnitas que tenemos que calcular (normalmente **x** e **y**) por nuevas incógnitas (**z, t**). Los cambios de incógnitas son los siguientes:

- $base_1{}^{x} = z$
- $base_2{}^{y} = t$

Al efectuar estos cambios obtendremos un sistema de ecuaciones de primer y/o segundo grado que resolveremos por los métodos habituales ya conocidos.

En nuestro **ejemplo** hacemos el cambio de incógnitas:

$$base_1{}^{x} = z \Rightarrow \mathbf{2^x = z}$$
$$base_2{}^{y} = t \Rightarrow \mathbf{3^y = t}$$

Así obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} z^2 - 2t = 10 \\ z + t = 7 \end{cases}$$

4. Resolver el sistema resultante.

En este **paso** obtendremos un sistema de ecuaciones de primer o segundo grado (en la mayoría de los caso de primer grado).

Para resolver el sistema anterior multiplicamos por dos la segunda ecuación y sumamos la ecuación resultante con la primera:

$$\begin{cases} z^2 - 2t = 10 \\ (z + t = 7)\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 - 2t = 10 \\ 2z + 2t = 14 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones resultantes obtenemos:

$$\begin{array}{r} z^2 - 2t = 10 \\ 2z + 2t = 14 \\ \hline z^2 + 2z + 0 = 24 \end{array}$$

Obtenemos una ecuación de segundo grado. Pasamos el término independiente al primer miembro y aplicamos la de fórmula de resolución de las ecuaciones de segundo grado.

$$z^2 + 2z - 24 = 0 \Rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2} \Rightarrow z_1 = -6;\ z_2 = 4$$

El valor $z_1 = -6$ no tiene sentido ya que, si sustituimos este valor en la ecuación de cambio de la incógnita x, obtenemos:

$$2^x = z \Rightarrow \text{para } z = z_1 = -6,\ \mathbf{2^x = -6}$$

El primer miembro de la ecuación anterior (2^x) es siempre positivo independientemente del valor (positivo o negativo) de x, por lo tanto no puede ser nunca igual al segundo miembro (-6) ya que éste es negativo.

Por lo tanto $\mathbf{z = z_1 = 4}$

Una vez conocido el valor de z podemos calcular t despejándola de la segunda ecuación del sistema:

$$z + t = 7 \Rightarrow t = 7 - z$$

$$t = 7 - 4 \Rightarrow \mathbf{t = 3}$$

5. **Deshacer el cambio de incógnitas.**

En el **paso** anterior hemos resuelto el sistema obteniendo **z** y **t**, pero las incógnitas que debemos calcular son **x** e **y**. Para calcularlas utilizaremos las ecuaciones del cambio de incógnitas.

Sustituyendo los valores de **z** y **t** en dichas ecuaciones obtenemos:

$$2^x = z \Rightarrow 2^x = 4$$

$$3^y = t \Rightarrow 3^y = 3$$

Ahora tenemos dos ecuaciones exponencial sencillas que resolvemos realizando los siguientes **pasos**:

1. **Descomponer las bases en el producto de sus factores primos.**

   2 y **3** son primos por lo tanto únicamente debemos descomponer el **4**:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

   Así: $4 = 2^2$

Sustituyendo en las ecuaciones exponenciales:

$$2^x = 2^2$$

$$3^y = 3^1$$

Tenemos dos igualdades entre potencias de la misma base.

2. **Igualar los exponentes y resolver la ecuación resultante.**

   Si dos potencias de la misma base son iguales sus exponentes deben ser también iguales.

   Por lo tanto podemos igualar los exponentes de las potencias de las dos igualdades del paso anterior:

$$2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

$$3^y = 3^1 \Rightarrow y = 1$$

Soluciones $x = 2$ e $y = 1$

6

Cálculo de logaritmos.

Para resolver este tipo de ejercicios efectu
pasos:

1. **Plantear la ecuación exponencial aso que queremos calcular.**

   La definición de logaritmo permite pla exponencial para calcularlo.

   Para ello recordamos que dado **a**, un nú distinto de uno, se llama **logaritmo** en b conocido **x** (es decir $\log_a x$) a otro número **y**

   $$a^y = x$$

   Por tanto si $\log_a c = y$ debe cumplirse la ec

   $$a^y = x$$

   Para calcular el valor del logaritmo (**y**) c ecuación exponencial planteada.

   Hay que hacer notar que, en los caso ecuación exponencial obtengamos una f **expresar dicha fracción en forma** $\frac{1}{4} = 4^{-1} \cdot ó \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$) para de esta igualdad entre potencias que nos permita res

   Ejemplo: **Calcular $\log_3 (1/27)$**

   Si llamamos **y** al valor del logaritmo:

   $$\log_3 (1/27) = y \Rightarrow a^y = x \Rightarrow$$

   Expresamos la fracción de la ecuación ex forma de potencia:

   $$3^y = \frac{1}{27} = 27^{-1} \Rightarrow 3^y = 2$$

2. **Resolver la ecuación exponencial plante**

   Para calcular el logaritmo debemos res exponencial sencilla.

   Para resolverla realizaremos los siguientes **pa**

   1. **Descomponer las bases en el factores primos.**

3 ya es un número primo, por lo tanto descomponemos el número **27**:

27	3
9	3
3	3
1	

Así $27 = 3^3$

Sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos una igualdad entre potencias de la misma base:

$$3^y = 27^{-1} \Rightarrow 3^y = (3^3)^{-1} \Rightarrow 3^y = 3^{-3}$$

2. **Igualar los exponentes y resolver la ecuación resultante.**

Si dos potencias de la misma base son iguales sus exponentes deben ser también iguales.

Por lo tanto podemos igualar los exponentes de las potencias de la igualdad anterior:

$$y = -3$$

Solución $\log_3 (1/27) = -3$

7 Cálculo de logaritmos mediante cambio de base

Este tipo de ejercicios hace referencia al cálculo de logaritmos que no se pueden hallar por el método descrito los ejercicios del tipo 6 de esta unidad (calculo de logaritmos) debido a que, al aplicar dicho método, **no** se obtienen una igualdad entre potencias de la misma base.

Para resolver este tipo de ejercicios efectuaremos los siguientes **pasos**:

1. **Plantear la ecuación exponencial asociada al logaritmo que queremos calcular.**

   El objetivo de este paso es comprobar si al plantear la ecuación exponencial asociada al logaritmo obtenemos una igualdad de dos potencias con la misma base.

   La definición de logaritmo permite plantear una ecuación exponencial sencilla (ecuaciones con **un único término en cada miembro** de la igualdad, y donde la incógnita aparece en **uno** de los **exponentes**).

   Para ello recordamos que dado **a**, un número real positivo y distinto de uno, se llama **logaritmo** en base **a** de un número **x** (es decir $\log_a x$) a otro número **y**, que cumple:

   $$a^y = x$$

   Por tanto si $\log_a x = y$ debe cumplirse la ecuación:

   $$a^y = x$$

   Este tipo de ecuaciones exponenciales sencillas **sólo** pueden resolverse directamente **si las bases** de los dos términos de la ecuación **son iguales** ya que en una igualdad de dos potencias, si las bases son iguales los exponentes deben ser también iguales.

   Si las bases NO son iguales, pueden resolverse**:**

   - mediante un cambio de base.
   - tomando logaritmos en ambos miembros de la ecuación.

   Ejemplo: **Calcular $\log_3 8$**

   Si llamamos **y** al logaritmo en base **3** de 8, la ecuación asociada es:

   $$\log_3 8 = y \;\Rightarrow\; 3^y = 8$$

   Tal cual se ha indicado anteriormente, la ecuación anterior podrá resolverse directamente si los dos términos de la ecuación pueden expresarse en la misma base.

Para comprobarlo basta con descomponer las bases (3, 8) de ambos términos en el producto de sus factores:

$3 = 3$ (ya que es un número primo)
$8 = 2^3$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$3^y = 2^3$$

Tal cual puede observarse, **NO** hemos obtenido una igualdad de potencias de la misma base.

Por lo tanto, debemos resolverla mediante un cambio de base o tomando logaritmos en ambos miembros de la ecuación.

8 Cálculo de la base de un logaritmo

Este tipo de ejercicios hace referencia a ecuaciones en las que la incógnita es la base del logaritmo.

Para resolver este tipo de ejercicios efectuaremos los siguientes **pasos**:

1. **Plantear la ecuación exponencial asociada al logaritmo que conocemos.**

   La definición de logaritmo de un número permite plantear una ecuación exponencial que relaciona dicho **número** con su **logaritmo** y con la **base** del mismo.

   Para ello recordamos que dado **a**, un número real positivo y distinto de uno, se llama **logaritmo** en base **a** de un **número** conocido **x** (es decir $\log_a x$) a otro número **y**, que cumple:

   $$a^y = x$$

   Por tanto si $\log_a c = y$ debe cumplirse la ecuación:

   $$a^y = x$$

   En este tipo de ejercicios se trata de, conociendo **x** (un número) e **y** (el valor del logaritmo de dicho número), calcular la base (**a**) en la que está calculado el logaritmo.

   Hay que hacer notar que, en los casos en los que en la ecuación exponencial obtengamos una fracción, **deberemos expresar dicha fracción en forma de potencia** (ej: $\frac{1}{4} = 4^{-1}$ · ó · $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$) para de esta manera, obtener una igualdad entre potencias que nos permita resolver la ecuación.

   Ejemplo: **Resolver** $\log_a 16 = 4$

   Aplicando la definición de logaritmo obtenemos la siguiente ecuación exponencial:

   $$\log_a 16 = 4 \Rightarrow a^4 = 16$$

   Para calcular la base **a** debemos resolver la ecuación exponencial anterior.

2. **Resolver la ecuación exponencial planteada.**

   En la mayoría de los ejercicios de este tipo, la ecuación resultante del paso anterior puede resolverse extrayendo, en los dos miembros de la misma, la raíz de **índice igual al exponente de la base (a)**.

En el **ejemplo** el exponente de la base en la ecuación exponencial es 4 por lo tanto, para calcular la base, debemos extraer la raíz cuarta (índice 4):

$$a^4 = 16 \Rightarrow \sqrt[4]{a^4} = \sqrt[4]{16} \Rightarrow a = \sqrt[4]{16} = 2$$

Conviene recordar nuevamente que la base de cualquier logaritmo debe ser real positiva y distinta de uno, por lo tanto debemos descartar las soluciones negativas de las raíces de índice par.

Solución a = 2

9 Ecuaciones logarítmicas.

Este tipo de ejercicios hace referencia a ecuaciones en las que:

- La ecuación contiene logaritmos.
- Uno o más logaritmos de la ecuación contienen a la incógnita: se dice que **actúan sobre la incógnita**.

Ejemplo: **Resolver** $\log(5+3x)-\log 2=1$

La ecuación del ejemplo:

- Presenta dos logaritmos.
- El primer logaritmo actúa sobre la incógnita (contiene a la incógnita).

Por lo tanto se trata de una ecuación logarítmica.

Efectuaremos los siguientes **pasos**:

1. **Expresar todos los términos de la ecuación en forma de logaritmo de la misma base.**

   Para poder resolver este tipo de ecuaciones, todos los términos de la ecuación deben estar expresados como logaritmos de la misma base, por lo tanto:

   - Si la ecuación contiene logaritmos de bases distintas deberemos efectuar los cambios de base necesarios para que todos ellos tengan la misma base.

     Para ello aplicaremos la fórmula del cambio de base:

     $$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

     Normalmente, en este nivel, los logaritmos de las ecuaciones que se le plantean al alumno tienen todos **ya** la misma base, por lo que no es necesario efectuar ningún cambio de base

   - Si algún término de la ecuación es un **número (y)** deberemos expresarlo como el logaritmo de otro número (**c**) cuya base sea igual a la base de los demás logaritmos (**a**). Es decir, dado **y** debemos expresarlo como:

     $$y = \log_a c$$

     Para ello necesitamos calcular **c.** Para calcularlo nos basamos en la relación entre un logaritmo y la ecuación exponencial asociada al mismo:

     $$\log_a c = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = c$$

Así, el primer miembro la ecuación del **ejemplo** presenta logaritmos **decimales** (base 10), mientras que el segundo miembro es un número (y = 1), por lo tanto debemos expresar el número dado y = 1 como el logaritmo en base 10 de un número **c** ($1 = \log_{10} c$), es decir:

$$1 = \log_{10} c \Rightarrow 10^1 = c \Rightarrow c = 10$$

Por lo tanto:

$$1 = \log 10$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\log(5+3x) - \log 2 = \log 10$$

2. **Aplicar las propiedades de los logaritmos.**

El objetivo de este **paso** es obtener una igualdad entre **dos** logaritmos de la misma base.

Para ello, aplicamos **en cada miembro de la ecuación** las propiedades de los logaritmos en el siguiente orden:

- $n \cdot \log_a x = \log_a x^n$

  Esta propiedad permite introducir los factores que multiplican a un logaritmo dentro del logaritmo.

- $\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y$

  ó

  $\log_a x - \log_a y = \log_a \quad = \log_a x/y$

  Estas propiedades permiten agrupar respectivamente las sumas y restas de **dos** logaritmos en el logaritmo de **un** producto o cociente.

En el **ejemplo**, el primer miembro es una resta de logaritmos que podemos, por tanto, expresarla como el logaritmo de un cociente:

$$\log(5+3x) - \log 2 = \log \frac{5+3x}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$\log \frac{5+3x}{2} = \log 10$$

3. Igualar las expresiones sobre las que actúan los logaritmos y resolver.

Al finalizar el paso anterior obtendremos una igualdad entre dos logaritmos de la misma base.

En este paso debemos tener en cuenta que, dos logaritmos de la misma base, únicamente son iguales si los términos sobre los que actúa cada logaritmo ("lo de dentro del logaritmo") son también iguales.

Por lo tanto, igualando los términos sobre los que actúa cada logaritmo, obtendremos una ecuación sencilla y sin logaritmos.

Así, en el **ejemplo**:

$$\log \frac{5+3x}{2} = \log 10 \Rightarrow \frac{5+3x}{2} = 10$$

$$5 + 3x = 20 \Rightarrow 3x = 20 - 5 = 15$$

$$x = \frac{15}{3} = 5$$

4. Comprobar la solución.

Es posible que la solución que hemos obtenido en el paso anterior no sea solución de la ecuación logarítmica que queremos resolver. Esto es debido a que **únicamente existen los logaritmos de números positivos**.

Por lo tanto, si al sustituir en la ecuación logarítmica el valor de **x** calculado en el paso anterior, obtenemos el logaritmo de un número no positivo (menor o igual a cero), significará que para ese valor de **x** el logaritmo no existe y por tanto, la ecuación no tiene solución para dicho valor.

En el **ejemplo**, al sustituir **x = 5** en la ecuación logarítmica inicial obtenemos:

$$\log(5+3x) - \log 2 = 1 \Rightarrow \log(5 + 3 \cdot 5) - \log 2 = 1$$

$$\log(20) - \log 2 = 1$$

Es decir, al sustituir en la ecuación logarítmica **x** por su valor (x = 5), todos los logaritmos de la ecuación son logaritmos de números positivos (20 > 0), por lo que pueden calcularse todos ellos y por lo tanto, puede afirmarse que la solución x = 5 es solución de la ecuación.

Solución x = 5

10

Sistemas de ecuaciones con una ecuación lineal y otra logarítmica

Este tipo de ejercicios hace referencia a sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas en los que **una ecuación es lineal y la otra logarítmica**.

Entendemos por ecuación logarítmica aquella en la que:

- La ecuación contiene logaritmos.
- Uno o más logaritmos de la ecuación contienen una de las incógnitas (o ambas): se dice que **actúan sobre las incógnitas**.

Ejemplo: **Resolver:**

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$$

Para resolver este tipo de sistemas efectuaremos los siguientes **pasos**:

1. **Expresar todos los términos de la *ecuación logarítmica* en forma de logaritmo de la misma base.**

   Para poder resolver este tipo de sistemas, todos los términos de la **ecuación logarítmica** deben estar expresados como logaritmos de la misma base, por lo tanto:

   - Si la ecuación logarítmica contiene logaritmos de bases distintas deberemos efectuar los cambios de base necesarios para que todos ellos tengan la misma base.

     Para ello aplicaremos la fórmula del cambio de base:

     $$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

     Normalmente, en este nivel, los logaritmos de las ecuaciones logarítmicas que se le plantean al alumno tienen todos **ya** la misma base, por lo que no es necesario efectuar ningún cambio de base.

   - Si algún término de la ecuación logarítmica es un **número (y)** deberemos expresarlo como el logaritmo de otro número (**c**) cuya base sea igual a la base de los demás logaritmos (**a**). Es decir, dado **y** debemos expresarlo como:

     $$y = \log_a c$$

     Para ello necesitamos calcular **c.** Para calcularlo nos basamos en la relación entre un logaritmo y la ecuación exponencial asociada al mismo:

$$\log_a c = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = c$$

Así, el primer miembro la ecuación logarítmica (log x + log y) del sistema del **ejemplo** contiene dos logaritmos **decimales** (base 10), mientras que el segundo miembro de dicha ecuación es un número (y =3), por lo tanto debemos expresar el número dado y =3 como el logaritmo en base 10 de un número **c** ($3 = \log_{10} c$), es decir:

$$3 = \log_{10} c \Rightarrow 10^3 = c \Rightarrow c = 1000$$

Por lo tanto:

$$3 = \log 1000$$

Sustituyendo en la ecuación logarítmica del sistema:

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ \log x + \log y = \log 1000 \end{cases}$$

2. Aplicar las propiedades de los logaritmos.

El objetivo de este **paso** es obtener, **en la ecuación logarítmica del sistema**, una igualdad entre **dos** logaritmos de la misma base.

Para ello, aplicamos **en cada miembro de la ecuación** las propiedades de los logaritmos en el siguiente orden:

- $n \cdot \log_a x = \log_a x^n$

  Esta propiedad permite introducir los factores que multiplican a un logaritmo dentro del logaritmo.

- $\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y$

  ó

  $\log_a x - \log_a y = \log_a = \log_a x/y$

  Estas propiedades permiten agrupar respectivamente las sumas y restas de **dos** logaritmos en el logaritmo de **un** producto o cociente.

En nuestro **ejemplo**, el primer miembro de la ecuación logarítmica es una suma de logaritmos que podemos, por tanto, expresarla como el logaritmo de un producto:

$$\log x + \log y = \log xy$$

Sustituyendo en el sistema del paso 1 obtenemos:

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ \log xy = \log 1000 \end{cases}$$

3. **Igualar las expresiones sobre las que actúan los logaritmos y sustituir la ecuación resultante en el sistema.**

Al finalizar el paso anterior, **en la ecuación logarítmica**, obtendremos una igualdad entre dos logaritmos de la misma base.

En este paso debemos tener en cuenta que, dos logaritmos de la misma base, únicamente son iguales si los términos sobre los que actúa cada logaritmo ("lo de dentro del logaritmo") son también iguales.

Por lo tanto, igualando los términos sobre los que actúa cada logaritmo, obtendremos una **ecuación sin logaritmos**.

Para resolver el sistema debemos sustituir **la ecuación logarítmica por esta nueva ecuación sin logaritmos**.

Así, en el **ejemplo**, al sustituir en el sistema del paso anterior la ecuación logarítmica log xy = log 1000 por la ecuación xy = 1000 obtenemos:

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ \log xy = \log 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 70 \\ xy = 1000 \end{cases}$$

4. **Resolver el sistema sin logaritmos.**

Si la ecuación logarítmica se ha sustituido por una ecuación lineal obtendremos un sistema de ecuaciones de primer grado que resolveremos por cualquiera de los métodos ya conocidos.

Si se ha sustituido por una de segundo grado resolveremos el sistema despejando cualquiera de las incógnitas en la ecuación lineal y sustituyéndola en la de segundo grado.

En el **ejemplo** hemos sustituido la ecuación logarítmica por una de segundo grado ($x \cdot y = 1000$ es de segundo grado porque las incógnitas están multiplicándose y la suma de sus exponentes es 1 + 1 = 2), por lo tanto:

- Despejamos **x** en la ecuación lineal:

$$x = 70 - y$$

- Sustituimos en la segunda ecuación:

$$(70 - y)y = 1000$$

$$70y - y^2 = 1000$$

Ordenamos de mayor a menor grado y transponemos todos los términos al primer miembro:

$$-y^2 + 70y - 1000 = 0$$

Multiplicamos los dos miembros por −1:

$$y^2 - 70y + 1000 = 0$$

Para calcular **y** aplicamos la fórmula de resolución de las ecuaciones de segundo grado:

$$y = \frac{70 \pm \sqrt{4900 - 4 \cdot 1000}}{2} = \frac{70 \pm \sqrt{4900 - 4000}}{2} =$$

$$= \frac{70 \pm \sqrt{900}}{2} = \frac{70 \pm 30}{2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{70 + 30}{2} = \dfrac{100}{2} = 50 \\[2ex] \dfrac{70 - 30}{2} = \dfrac{40}{2} = 20 \end{cases}$$

Calculamos ahora **x** a partir de la expresión $x = 70 - y$:

Para $y = 50$ $x = 20$

Para $y = 20$ $x = 50$

5. Comprobar las soluciones.

Es posible que las soluciones que hemos obtenido en el paso anterior no sean solución del sistema inicial. Esto es debido a que **únicamente existen los logaritmos de números positivos**.

Por lo tanto, si al sustituir en la ecuación logarítmica del sistema inicial los valores de **x** e **y** calculados en el paso anterior, obtenemos algún logaritmo de un número no positivo (menor o igual a cero), significará que dicho logaritmo no existe para tales valores de **x** e **y** por lo que, tanto la ecuación logarítmica como el sistema no tienen solución para estos valores.

Así en el ejemplo, para comprobar si las dos parejas de valores obtenidas son solución del sistema sustituimos dichos valores en el sistema:

PARA x = 20 e y = 50:

$$\begin{cases} 20 + 50 = 70 \\ \log 20 + \log 50 = 3 \end{cases}$$

Podemos comprobar que, al sustituir en la ecuación logarítmica **x** =20 e **y** =50, todos los logaritmos de la ecuación son logaritmos de números positivos, por lo que puede afirmarse que la solución **x** =20 e **y** =50 es solución de la ecuación logarítmica y por lo tanto del sistema.

PARA x = 50 e y = 20:

$$\begin{cases} 50 + 20 = 70 \\ \log 50 + \log 20 = 3 \end{cases}$$

Podemos comprobar que, al sustituir en la ecuación logarítmica **x** = 50 e **y** = 20, todos los logaritmos de la ecuación son logaritmos de números positivos, por lo que puede afirmarse que la solución **x** = 50 e **y** = 20 es también solución de la ecuación logarítmica y por lo tanto del sistema

Soluciones x = 20, y = 50
x = 50, y = 20

11 Sistemas de ecuaciones logarítmicas

Este tipo de ejercicios hace referencia a sistemas de dos ecuaciones logarítmicas con dos incógnitas.

Entendemos por ecuación logarítmica aquella en la que:

- La ecuación contiene logaritmos.
- Uno o más logaritmos de la ecuación contienen una de las incógnitas (o ambas): se dice que **actúan sobre las incógnitas**.

Para resolver este tipo de ejercicios efectuaremos los siguientes **pasos**:

1. **Descomponer los logaritmos que contienen a la incógnita.**

   El objetivo de este paso es que cada logaritmo contenga sólo una de las incógnitas, **x** ó **y.**

   Para ello debemos, aplicando las propiedades de los logaritmos, descomponer:

   - el logaritmo de un producto de en la suma de dos logaritmos:

     $$\log_a x\cdot y = \log_a x + \log_a y$$

   - el logaritmo de un cociente en la diferencia de dos logaritmos:

     $$\log_a x/y = \log_a x - \log_a y$$

   - el logaritmo de una potencia en el producto del exponente por el logaritmo de la base:

     $$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

   Ejemplo: **Resolver**

   $$\begin{cases} \log x^2 - 5\log y = -1 \\ \log x^3 y^2 = 8 \end{cases}$$

   La primera ecuación contiene el logaritmo de una potencia la cual puede expresarse como el producto del exponente por el logaritmo de la base:

   $$\log x^2 = 2\cdot \log x \text{(expresión 1)}$$

   La segunda ecuación contiene el logaritmo de un producto, el cual puede expresarse como la suma de los logaritmos de cada uno de los factores:

   $$\log x^3 y^2 = \log x^3 + \log y^2 \qquad \text{(expresión 2)}$$

Según podemos observar en la expresión 2, al descomponer el logaritmo del producto hemos obtenido los logaritmos de dos potencias.

Cada uno de estos logaritmos puede expresarse como el producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log x^3 = 3\cdot\log x \qquad \text{(expresión 3)}$$

$$\log y^2 = 2\cdot\log y \qquad \text{(expresión 4)}$$

Sustituyendo las expresiones 3 y 4 en la 2 obtenemos:

$$\log x^3y^2 = 3\log x + 2\log y \qquad \text{(expresión 5)}$$

Sustituyendo las expresiones 1 y 5 en el sistema obtenemos:

$$\begin{cases} 2\log x - 5\log y = -1 \\ 3\log x + 2\log y = 8 \end{cases}$$

2. **Efectuar un cambio de incógnitas.**

Se trata de sustituir los logaritmos que actúan sobre cada una de las incógnitas por otras incógnitas **z** y **t,** de forma que obtengamos un sistema de ecuaciones de primer grado.

El cambio que suele efectuarse es el siguiente:

$$\begin{gathered} \log_a x = z \\ \log_a y = t \end{gathered}$$

La mayoría de los logaritmos de estos sistemas son de base decimal, es decir a = 10, por lo que el cambio más habitual es:

$$\begin{gathered} \log x = z \\ \log y = t \end{gathered}$$

En ocasiones se plantean cambios del tipo log 5x = z. Estos cambios suelen aplicarse fundamentalmente en los casos en los que en **las dos ecuaciones del sistema inicial** contienen la **misma** expresión logarítmica.

En el sistema del **ejemplo** efectuamos el cambio de incógnitas más habitual:

$$\begin{gathered} \log x = z \\ \log y = t \end{gathered}$$

Así, el sistema:

$$\begin{cases} 2z - 5t = -1 \\ 3z + 2t = 8 \end{cases}$$

3. **Resolver el sistema de ecuaciones de primer grado.**

Resolvemos el sistema de ecuaciones de primer grado por cualquiera de los métodos ya conocidos.

En el **ejemplo** lo resolvemos por el método de reducción:

Multiplicamos la primera ecuación por **−3** y la segunda por **2**:

$$\begin{array}{r} -6z + 15t = \ \ 3 \\ 6z + \ 4t = 16 \\ \hline 0 \ + \ 19t = 19 \end{array}$$

Despejando t:

$$t=19/19=1$$

Calculamos **z** despejándola en la primera ecuación y sustituyendo t = 1:

$$2z - 5t = -1$$

$$2z = -1 + 5t$$

$$z = \frac{-1+5t}{2}$$

Para t = 1

$$z = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

4. **Deshacer el cambio de incógnitas.**

En el **paso** anterior hemos obtenido los valores de **z** y **t**, sin embargo las incógnitas que debemos calcular son **x** e **y**. Para calcularlas utilizaremos las ecuaciones del cambio de incógnitas:

- $\log x = z$

  $$z = 2 \Rightarrow \log x = 2$$

  Ahora tenemos una ecuación logarítmica sencilla. Para resolverla debemos expresar el segundo término (2) como logaritmo decimal:

  $$2 = \log u$$

  Para calcular **u** nos basamos en la ecuación exponencial asociada al logaritmo anterior:

  $$u = 10^2 = 100 \Rightarrow 2 = \log u = \log 100$$

  Sustituyendo en la ecuación logarítmica:

  $$\log x = 2 \Rightarrow \log x = \log 100$$

  Igualando los términos sobre los que actúa cada logaritmo, obtenemos:

$$x = 100$$

- $\log y = t$

$$t = 1 \Rightarrow \log y = 1$$

Ahora tenemos una ecuación logarítmica sencilla que ya sabemos resolver. Para resolverla debemos expresar el segundo término (1) como logaritmo decimal:

$$1 = \log u$$

Para calcular **u** nos basamos en la ecuación exponencial asociada al logaritmo anterior:

$$u = 10^1 = 10 \Rightarrow 1 = \log 10$$

Sustituyendo en la ecuación logarítmica:

$$\log y = \log 10$$

Igualando los términos sobre los que actúa cada logaritmo, obtenemos:

$$y = 10$$

Soluciones x = 100, y = 10.