INTRO. LÍMITES DE SUCESIONES

Con el estudio de límites de sucesiones se inaugura el bloque temático dedicado al cálculo (o análisis) infinitesimal. Este nombre se debe a que se va a especular con cantidades infinitesimales (infinitamente pequeñas) en el cálculo diferencial e integral, fundamentalmente, y se reflexionará acerca de sucesiones de números al considerar una cantidad infinita de términos. Los conceptos del análisis infinitesimal son de una extraordinaria sutileza y el fruto de muchos años de pensamiento.

En el estudio de progresiones se indicó que una sucesión es una colección de números dispuestos uno a continuación de otro y separados por comas. Esto puede considerarse como una definición poco rigurosa, pero una definición más exacta no ayudaría mucho a entender con mayor claridad lo que es una sucesión.

En las progresiones, en general, se centró la atención en un número finito de términos; en lo sucesivo tendrá más interés considerar los infinitos términos de una progresión.

Todas las progresiones geométricas cuya razón, en valor absoluto, es menor que uno, tienen algo en común: los términos de la sucesión se van acercando a cero rápidamente (la sucesión tiende a cero).

Por supuesto, no todas las sucesiones presentan la particularidad de que sus términos se aproximen paulatinamente a un número, llamado límite de la sucesión. Las que así se comporten se llamarán convergentes y, de todas las sucesiones, éstas son las merecedoras de estudio.

El concepto de límite ha sido de enorme utilidad en el desarrollo de las matemáticas; en él se fundamenta el cálculo infinitesimal.

Aunque muchos matemáticos utilizaron la idea intuitiva de límite, fue el barón de Cauchy (1789-1857), a principios del siglo XIX, quien dio una definición satisfactoria de límite y, en consecuencia, de derivada de una función.

SUCESIONES. LÍMITES

Una sucesión genérica se simboliza por $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ en la que el subíndice denota, con toda exactitud, el lugar que cada término ocupa en la misma. Así, a_5 es el quinto término de la sucesión.

Cuando en una sucesión haya que referirse a un término cualquiera sin especificar el lugar que ocupa se hará siempre mención al término a_n, denominado término *n*-ésimo. En definitiva, el lugar que cada término tome en una sucesión será de vital importancia a la hora de hacer un mínimo análisis del comportamiento de la sucesión.

La simbolización de una sucesión por $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$; o más simplificadamente

(a_n), no es en modo alguno gratuita. Los subíndices recorren los números naturales porque una sucesión tiene tantos elementos como números naturales hay; es decir, una sucesión tiene una cantidad infinita numerable de términos.

Se debe recordar que el *término general de una sucesión* es una expresión que permite conocer un elemento cualquiera siempre que se sepa el lugar que ocupa.

Entorno

Dado un punto (número) *a,* un *entorno* centrado en *a* es un intervalo de la forma $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; es decir, es el conjunto de puntos x tales que $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

Ejercicio: cálculo del término general de una sucesión

① Encontrar el quincuagésimo término de la sucesión 1, 3, 5, 7,...

Resolución:

- Es una progresión aritmética de diferencia 2.

- Su término general es:

$$a_n = 1 + (n - 1)\cdot 2 = 2n - 1$$

- $a_{50} = 2\cdot 50 - 1 = 99$

② Encontrar el término general de la sucesión $\frac{3}{10}, \frac{5}{26}, \frac{7}{50}, \frac{9}{82}, \ldots$

Resolución:

- Los numeradores forman una progresión aritmética de diferencia 2. Su término general es $a_n = 2n + 1$

- Cada denominador es el cuadrado de su numerador aumentado en una unidad:

$$10 = 3^2 + 1;\ 26 = 5^2 + 1;\ 50 = 7^2 + 1;\ 82 = 9^2 + 1$$

- El término general de la sucesión es:

$$b_n = \frac{a_n}{a_n^2 + 1} = \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + 1} = \frac{2n+1}{4n^2 + 4n + 2}$$

El problema del límite

Encontrar el límite de una sucesión es un problema que consiste en determinar a qué número, si es que existe, se aproximan sus términos.

En la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ cuyo término general es, evidentemente, $a_n = \frac{1}{n}$, al aumentar n (el número de orden), a_n está cada vez más próximo a cero:

$$a_5 = \frac{1}{5}\ ;\ a_{1\,000} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001\ ;\ a_{1\,000\,000} = \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000001$$

1.Ningún término de la sucesión llega a valer cero.

2.Elegido un entorno centrado en cero, por pequeño que éste sea, siempre se encuentra un término tal que a partir de él todos los términos de la sucesión están dentro de ese entorno.

Por ejemplo, si se elige el entorno (-0,0001 ; 0,0001), a partir del término $a_{10\,000}$, todos los demás términos (a_n, $n > 10\,000$) están en dicho entorno.

En efecto:

- $a_{10\,000} = 0{,}0001$. Coincide con uno de los extremos del intervalo y, por definición, no tiene cabida en él.

- $a_{10\,001} = \frac{1}{10\,001} = 0{,}0000999 < 0{,}0001$ y, por tanto, pertenece al intervalo (-0,0001 ; 0,0001).

- Si $n > 10\,001$, $a_n < a_{10\,001} < 0{,}0001$

- Se concluye que si $n > 10\,000$, $a_n \in (-0{,}0001; 0.0001)$.

Este ejemplo pone las cosas a punto para comprender la definición de límite de una sucesión.

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Dada una sucesión (a_n), se dice que (a_n) tiene por *límite l*, *tiende* a l o *converge* a l cuando n tiende a infinito (∞), y se simbolizará

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l,$$

o más simplificadamente

$$(a_n) \to l,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ (épsilon) tan pequeño como se quiera, existe un subíndice n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, a_n pertenece al entorno $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

Es decir, a partir de un elemento en adelante todos caen en el entorno citado.
Esto significa que para $n \geq n_0$, $|\,a_n - l\,| < \varepsilon$.

Y recordando el significado de valor absoluto, $|a_n - l| < \varepsilon$ se traduce en
$-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$, y sumando l a los tres miembros de la desigualdad, $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$.

EL número n_0 que se ha de encontrar para cada ε, depende de éste.

En general, cuando más pequeño se tomo ε, mayor ha de ser el n_0 correspondiente.

Sucesión convergente

Toda sucesión que tenga límite se dice que es *convergente*.

Una sucesión (a_n) que tenga por límite l, se dirá que tiende a l o que converge a l.

Ejercicio: Demostración de $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

① Demostrar que la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ converge a cero.

Resolución:

- Se toma un ε cualquiera (sin especificar más).

- Hay que encontrar un n_0 tal que para $n \geq n_0$, $0 - \varepsilon < a_n < 0 + \varepsilon$.

Como $a_n = \frac{1}{n}$, hay que encontrar un n_0 tal que para $n \geq n_0$, $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

De $\frac{1}{n} < \varepsilon$ se deduce, sin más que multiplicar por n, que $1 < n\varepsilon$.

Y despejando n, $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Como $n \geq n_0$, basta elegir n_0 de modo que $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Así, si se elige, $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, el n_0 que hay que tomar es $n_0 > \frac{1}{1/1000} = 1\,000$.

En efecto, si $n \geq n_0 > 1\,000$, $a_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{1\,000} = \varepsilon$. De este modo se cumple que $-\frac{1}{1\,000} < \frac{1}{n} < \frac{1}{1\,000} = \varepsilon$.

Esto significa que elegido un $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, a partir del término $n_0 = 1\,001$, todos los términos de la sucesión $\frac{1}{n}$ se encuentran en el intervalo $\left(-\frac{1}{1\,000}, \frac{1}{1\,000}\right)$.

De todo lo anterior se deduce que $\frac{1}{n} \to 0$.

2. Decidir si la sucesión de término general
$a_n = \frac{2n-3}{n+5}$
es convergente y, en caso afirmativo, hallar el límite.

Resolución:

- Para $n = 1$, $a_1 = -1/6 = -0{,}1666$

Para $n = 7$, $a_7 = 0{,}9166$

Si $n = 142$, $a_{142} = 1{,}91156$; $a_{1\,200} = \frac{2 \cdot 1\,200 - 3}{1\,200 + 5} = 1{,}9975$; $a_{5\,000} = 1{,}9974$;
$a_{10\,000} = 1{,}9997001$; $a_{30\,000} = 1{,}9995667$;...
Todo parece indicar que el límite de esta sucesión, cuando n tiende a infinito, es 2.

Para probarlo, se hará uso de la definición.

- Se toma un ε cualquiera.

- Hay que ver a partir de qué n se cumple $|a_n - 2| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{2n-3}{n+5} - 2\right| = \left|\frac{-13}{n+5}\right| = \frac{13}{n+5} < \varepsilon$$

- Hay que resolver la inecuación $\frac{13}{n+5} < \varepsilon$:
$13 < \varepsilon(n+5) = \varepsilon n + 5\varepsilon \Rightarrow 13 - 5\varepsilon < \varepsilon n$.

Dividiendo los dos miembros entre ε: $\frac{13 - 5\varepsilon}{\varepsilon} < n$

- Elegido un ε cualquiera, basta tomar $n_0 > \frac{13 - 5\varepsilon}{\varepsilon}$

Por ejemplo, si $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, $n_0 > \frac{13 - 5 \cdot \frac{1}{1\,000}}{\frac{1}{1\,000}} = 12\ 995$.

En consecuencia, $a_{12\,966}$, $a_{12\,997}$, $a_{12\,998}$ ... están todos contenidos en el entorno $\left(2-\frac{1}{1\,000}, 2+\frac{1}{1\,000}\right)$.

Primera propiedad de las sucesiones convergentes

a) Si una sucesión (a_n) tiene límite *l* positivo, existe un término a partir del cual todos los términos de la sucesión son positivos.

b) Si una sucesión (a_n) tiene límite *l* negativo, existe un término a partir del cual los términos de la sucesión son negativos.

c) Si una sucesión converge a cero, no se puede asegurar nada acerca del signo de cada uno de los términos de la sucesión.

Demostración:

a) Si l es positivo, se toma $\varepsilon = \frac{l}{2}$ y se considera el entorno $\left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}\right)$.

- Por definición de límite de una sucesión, existe un subíndice n_0 tal que para $n \geq n_0$, a_n está en el entorno $\left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}\right)$.

- Esto quiere decir que $0 < \frac{l}{2} < a_n$, lo que prueba que a partir de un término en adelante, los que le siguen son positivos.

b) Si l es negativo, se considera el entorno $\left(\frac{3l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, donde $\varepsilon = \frac{l}{2}$.

El razonamiento es análogo al del caso anterior.

c) Basta con poner un ejemplo. La sucesión $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots,$ cuyo término general es $\frac{(-1)^n}{n}$, converge claramente a cero y sus términos son alternadamente positivos y negativos.

Sucesiones alternadas

Son aquellas que alternan los signos de sus términos (positivo, negativo, positivo).

Sucesiones divergentes

Una sucesión es *divergente* si los términos se aproximan cada vez más a infinito o a menos infinito (+∞ ó –∞). Expresado de forma rigurosa:

●Una sucesión (a_n) tiene por límite +∞ ó diverge a +∞ si elegido un número k tan grande como se quiere, se puede encontrar un subíndice n_0 tal que para cualquier $n \geq n_0$, $a_n > k$.

Esto es equivalente a afirmar que para $n \geq n_0$, a_n está en el intervalo (k, +∞), es decir, los términos se hacen tan grandes como se quiera.

●Una sucesión (a_n) tiene por límite -∞ ó diverge a -∞ si elegido un número k tan grande como se quiere, se puede encontrar un subíndice n_0 tal que para cualquier $n \geq n_0$, $a_n < -k$.

Esto equivale a decir que para $n \geq n_0$, a_n pertenece al intervalo (-∞, $-k$).

Igual que en las sucesiones convergentes, para cada número k elegido, el subíndice n_0 será distinto. Cuanto mayor sea k, mayor resultará n_0.

Sucesión oscilante

Una sucesión (a_n) se dice que es *oscilante* si no es convergente ni divergente.

Ejercicio: sucesiones divergentes y oscilantes

① Probar que la sucesión $a_n = 5n^2 - 9$ diverge a +∞.

Resolución:

●Se elige un número k tan grande como se desee. Por ejemplo $k = 10^8$.

●Hay que encontrar los valores de n para los cuales $a_n > 10^8$, es decir, $5n^2 - 9 > 10^8$.

●En $5n^2 - 9 > 10^8$ se suma 9 a los dos miembros: $5n^2 > 10^8 + 9 = 100\,000\,009$.

Se divide entre 5: $n^2 > \dfrac{100\,000\,009}{5} \Rightarrow n > \sqrt{\dfrac{100\,000\,009}{5}} \cong 4\,472$

A partir del término $a_{4\,473}$, $a_n > 10^8$.

② ¿Tiene límite la sucesión $a_n = (-1)^n \cdot 3$?

Resolución:

● Los términos de esta sucesión son:
-3, 3, -3,3, -3,3, ...

•La sucesión $a_n = (-1)^n \cdot 3$ es oscilante.

• Se ha de probar que no tiene límite: los posibles límites son 3 y -3.

Supóngase que $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$:

Si se toma ε = 1, los términos impares $a_{2n-1} = -3$ no éstan en el intervalo $(l - \varepsilon, l + \varepsilon) = (2, 4)$. No se puede encontrar un n_0 a partir del cual todos los términos están dentro del intervalo (2, 4).

Supóngase que $\lim_{n\to\infty} a_n = -3$:

Si se toma ε = 1, los términos pares $a_{2n} = 3$ no se encuentran en $(l - \varepsilon, l + \varepsilon) = (-4, 2)$. No se puede encontrar un n_0 a partir del cual todos los términos estén dentro del intervalo (-4, 2).

•Es fácil observar que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \pm\infty$.

Por lo tanto la sucesión es oscilante.

Es fácil caer en la tentación de tomar el intervalo (-4,10) y pensar que puesto que todos los términos de la sucesión pertenecen a él, la sucesión debería tener límite.
Sin embargo, la definición de límite obliga a que elegido un ε cualquiera todos, salvo una cantidad finita de términos, queden en el intervalo $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. Basta, pues, elegir un ε para el que no se cumpla esta premisa y concluir que la sucesión no tiene límite.

SUCESIONES ACOTADAS

Sucesiones acotadas superiormente e inferiormente

Una *sucesión* (a_n) está acotada *superiormente* si existe un número *k* tal que cualquier término de la sucesión es menor o igual que *k*, es decir, para todo *n*,
$a_n \leq k$.

Al número *k* se le llama *cota superior* de la sucesión.

De la misma forma, una *sucesión* está *acotada inferiormente* si existe un número *M* tal que cualquier término de la sucesión es mayor o igual que *M*. En consecuencia, para cualquier *n*, $a_n \geq M$.

Al número *M* se le llama *cota inferior* de la sucesión.

Sucesión acotada

Una *sucesión* que está acotada superiormente e inferiormente se dice que está *acotada*.
En este caso existe un número *k* tal que $-k < a_n < k$, es decir, $|a_n| < k$.

Observando estas definiciones es claro que una sucesión que diverge a +∞ no puede estar acotada superiormente, y una sucesión que diverge a -∞ no está acotada inferiormente.

Ejercicio: ejemplos de sucesiones acotadas

① Probar que la sucesión de término general $a_n = \frac{2n^2+1}{n^2}$ está acotada inferiormente por 2 y superiormente por 3.

Resolución:

• Hay que demostrar que $a_n = \frac{2n^2+1}{n^2} \geq 2$.

Multiplicando ambos miembros por n^2: $2n^2 + 1 \geq 2n^2$.

Restando $2n^2$: $1 \geq 0$, lo cual es cierto.

Por lo tanto $\frac{2n^2+1}{n^2} \geq 2$ y a_n está acotada inferiormente por 2.

• Hay que probar que $\frac{2n^2+1}{n^2} \leq 3$; es decir, $2n^2 + 1 \leq 3n^2$.

Restando $2n^2$ a los dos miembros, $1 \leq n^2$.
Y esto es cierto ya que *n* es un número natural.

Luego $\frac{2n^2+1}{n^2} \leq 3$ y a_n está acotada superiormente por 3.

② Probar que la sucesión $\frac{2n^2+1}{n^2}$ está acotada.

Resolución:

• En el ejemplo anterior se ha visto que $2 \leq \frac{2n^2+1}{n^2} \leq 3$.

• Escribiendo $-4 < 2 \leq \frac{2n^2+1}{n^2} \leq 3 < 4$, se tiene que $\left|\frac{2n^2+1}{n^2}\right| < 4$.

Otras propiedades de las sucesiones convergentes

• *Propiedad 1*

Cualquiera sucesión convergente está acotada.

● *Propiedad 2*

Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones convergentes con límites L_1 y L_2 respectivamente, y tales que $a_n \leq b_n$ para todo n, entonces $L_1 \leq L_2$.

Es decir, de $a_n \leq b_n$ se deduce que $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

● *Propiedad 3*

Si (a_n), (b_n) y (c_n) son tres sucesiones convergentes tales que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo n, y $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

La última propiedad se utiliza en numerosas ocasiones para determinar el límite de una sucesión si se conocen los límites de otras dos sucesiones, una de ellas con términos mayores que las de la primera y la otra con términos menores.

Ejercicio: cálculo de límites

① Calcular el límite de la sucesión de término general $a_n = \frac{n-1}{n^2}$

Resolución:

●Es claro que para cualquier n,

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \frac{n-1}{n^2} \\ \text{y } \frac{n-1}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \end{array}\right\} 0 \leq \frac{n-1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$$

● La sucesión constante 0: 0, 0, 0, 0, ... tiene por límite 0.

●La sucesión $b_n = \frac{1}{n}$ también tiene por límite cero. Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

y se concluye que $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2} = 0$

INFINITÉSIMOS

Una sucesión es un *infinitésimo* si es convergente y tiene por límite cero.
(a_n) es un infinitésimo si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por definición de límite, (a_n) es un infinitésimo si para todo ε existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$.

Ejemplos:

1. La sucesión $\frac{1}{n}$ es un infinitésimo pues $\frac{1}{n} \to 0$

2. La sucesión $\frac{n-1}{n^2}$ es otro infinitésimo pues según se ha visto, $\frac{n-1}{n^2} \to 0$

Propiedades de los infinitésimos

1. La suma de dos infinitésimos es un infinitésimo

Si $\lim a_n = 0$ y $\lim b_n = 0 \Rightarrow \lim(a_n + b_n) = 0$

2. El producto de un infinitésimo por una sucesión acotada es un infinitésimo.

Si $\lim a_n = 0$ y b_n es acotada $\Rightarrow \lim(a_n \cdot b_n) = 0$

3. El producto de infinitésimos es un infinitésimo.

Si $\lim a_n = 0$ y $\lim b_n = 0 \Rightarrow \lim(a_n \cdot b_n) = 0$

4. El producto de un número por un infinitésimo es un infinitésimo.

Si $\lim a_n = 0 \Rightarrow \lim(k \cdot a_n) = 0$

5. Si una sucesión (a_n) converge a L, la sucesión ($a_n - L$) es un infinitésimo.

Si $\lim a_n = L \Rightarrow \lim(a_n - L) = 0$

PROP. DE LÍMITES DE SUC.

Primera propiedad

La suma de dos sucesiones convergentes es convergente y su límite es la suma de los límites.

$$\left.\begin{array}{l} \lim a_n = L_1 \\ \lim b_n = L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim(a_n + b_n) = L_1 + L_2$$

Segunda propiedad

La diferencia de dos sucesiones convergentes es convergente y su límite es la diferencia de los límites.

$$\left.\begin{array}{l} \lim a_n = L_1 \\ \lim b_n = L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim(a_n - b_n) = L_1 - L_2$$

Tercera propiedad

El producto de dos sucesiones convergentes es convergente y su límite es el producto de los límites.

$$\left.\begin{array}{l} \lim a_n = L_1 \\ \lim b_n = L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim(a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2$$

Cuarta propiedad

Si una sucesión (a_n) tiene límite L, distinto de 0, y tiene todos sus términos también distintos de 0, entonces la sucesión $\left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots$ es convergente y su límite es $\frac{1}{L}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim a_n = L \neq 0 \\ a_n \neq 0 \ \forall_n \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}$$

Quinta propiedad

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones convergentes que tienen por límites L_1 y L_2.

Si además $b_n \neq 0$ para todo n y $L_2 \neq 0$, la sucesión $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ es convergente y tiene por límite $\frac{L_1}{L_2}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim a_n = L_1 \\ \lim b_n = L_2 \neq 0 \\ b_n \neq 0 \ \forall_n \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}$$

CÁLCULO DE LÍMITES (I)

Límites de sucesiones $a_n = \frac{1}{n^m}$, siendo m un número natural

Es claro que $0 \leq \frac{1}{n^m} \leq \frac{1}{n}$. Se ha comprobado que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Por una de las propiedades de sucesiones convergentes,

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^m} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

Como $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^m} = 0$.

Límites de sucesiones de término general $a_n = n^m$, con m número natural

La sucesión $a_n = n$ tiende a ∞, ya que sus términos se hacen tan grandes como se quiera.

Para cualquier número natural m, $n^m > n$. Por tanto, si $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} n^m = \infty$.

Ejemplo: cálculo de límites

① Dada la sucesión $a_n = \frac{2n-3}{n+5}$, calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$.

Resolución:

- Se comprobó que la sucesión $a_n = \frac{2n-3}{n+5}$ tiene límite $2 \neq 0$.

- Para cualquier n, $a_n = \frac{2n-3}{n+5} \neq 0$.

- Por lo tanto, $\frac{1}{a_n} = \frac{n+5}{2n-3}$ y su límite es $\lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{2n-3} = \frac{1}{2}$

② Calcular el límite de la sucesión $\frac{1}{n^3}$.

Resolución:

- La sucesión es de la forma $a_n = \frac{1}{n^m}$ con m = 3.

- Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

③ Calcular el límite de la sucesión $\frac{5}{n^2}$.

Resolución:

- Por las propiedades de los límites, $\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 5 \cdot 0 = 0$

④ Calcular $\lim_{n\to\infty} (n^3 - 7)$.

Resolución:

- Se saca factor común n^3.

$$n^3 - 7 = n^3\left(1 - \frac{7}{n^3}\right)$$

• Se sabe que $\lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^3} = 0$, por tanto, $\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{7}{n^3} = 1 - 0 = 1$

• Como $\lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$, $\lim_{n\to\infty} (n^3 - 7) = \lim_{n\to\infty} n^3\left(1 - \frac{7}{n^3}\right) = \infty \cdot 1 = \infty$

⑤ Calcular $\lim_{n\to\infty} (-n^2 + 3n + 10)$.

Resolución:

• Se saca factor común n^2 (siempre el término de mayor grado):

$$-n^2 + 3n + 10 = n^2\left(-1 + \frac{3n}{n^2} + \frac{10}{n^2}\right) = n^2\left(-1 + \frac{3}{n} + \frac{10}{n^2}\right)$$

• Como $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{10}{n^2} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\left(-1 + \frac{3}{n} + \frac{10}{n^2}\right) = -1 + 0 + 0 = -1$

• Finalmente, $\lim_{n\to\infty} (-n^2 + 3n + 10) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(-1 + \frac{3}{n} + \frac{10}{n^2}\right) = \infty \cdot (-1) = -\infty$

Antes de pasar a estudiar el siguiente caso de límites de sucesiones es preciso conocer una propiedad que será de frecuente uso.

Propiedad

Si (a_n) es una sucesión que tiene límite $a \neq 0$ y (b_n) es otra sucesión que converge a cero, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim a_n = a \neq 0 \\ \lim b_n = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

Ejemplo: cálculo de límites

---

① Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-3)n^2}{n+5}$

Resolución:

• Basta observar que $\frac{(2n-3)n^2}{n+5} = \frac{2n-3}{n+5} : \frac{1}{n^2}$

• Se ha probado que $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n+5} = 2 \neq 0$ y se sabe que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

• Por la propiedad anterior, $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-3)n^2}{n+5} = \infty$

Límites de sucesiones de término general un cociente de polinomios

Se trata de calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \ldots + b_1 n + b_0}$

Se distinguen tres casos:

A) *p > q*.

•Se divide numerador y denominador entre n^p con lo que la fracción no varía.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \ldots + b_1 n + b_0} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_p + a_{p-1}\cdot\frac{1}{n} + \ldots + a_1\cdot\frac{1}{n^{p-1}} + a_0\cdot\frac{1}{n^p}}{b_q\cdot\frac{1}{n^{p-q}} + b_{q-1}\cdot\frac{1}{n^{p-q+1}} + \ldots + b_1\cdot\frac{1}{n^{p-1}} + b_0\cdot\frac{1}{n^p}}$$

•Pero $\lim_{n\to\infty} a_{p-1}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} a_{p-2}\cdot\frac{1}{n^2} = \ldots = \lim_{n\to\infty} a_0\cdot\frac{1}{n^p} = 0$

• Por tanto, el límite del numerador es a_p sin más que aplicar la propiedad del límite de una suma de sucesiones.

•Y $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{q-1}}{n^{p-1}} = \lim_{n\to\infty} b_{q-1}\cdot\frac{1}{n^{p-q+1}} = \ldots = \lim_{n\to\infty} b_0\cdot\frac{1}{n^p} = 0,$
por lo que el límite del denominador es cero.

•Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \ldots + b_1 n + b_0} = \frac{a_p}{0} = \infty$

Si $a_p > 0$, el límite es $+\infty$.

Si $a_p < 0$, el límite es $-\infty$.

B) *p = q*

•En este caso se divide numerador y denominador entre n^p :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_p n^p + b_{p-1} n^{p-1} + \ldots + b_1 n + b_0} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_p + a_{p-1}\cdot\frac{1}{n} + \ \dots\ + a_1\cdot\frac{1}{n^{p-1}} + a_0\cdot\frac{1}{n^p}}{b_p + b_{p-1}\cdot\frac{1}{n} + \ \dots\ + b_1\cdot\frac{1}{n^{p-1}} + b_0\cdot\frac{1}{n^p}}$$

•Pero $\lim_{n\to\infty} a_{p-1}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} a_{p-2}\cdot\frac{1}{n^2} = \ \dots\ = \lim_{n\to\infty} a_1\cdot\frac{1}{n^{p-1}} = \lim_{n\to\infty} a_0\cdot\frac{1}{n^p} = 0$

Por lo que el límite del numerador es a_p .

•Y $\lim_{n\to\infty} b_{p-1}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} b_{p-2}\cdot\frac{1}{n^2} = \ \dots\ = \lim_{n\to\infty} b_1\cdot\frac{1}{n^{p-1}} = \lim_{n\to\infty} b_0\cdot\frac{1}{n^p} = 0$

El límite del denominador es b_p .

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + \ \dots\ + a_1 n + a_0}{b_p n^p + \ \dots\ + b_1 n + b_0} = \frac{a_p}{b_p}$$

El límite es, por tanto, el cociente de los coeficientes de los monomios de mayor grado del numerador y denominador.

C) $p < q$

•Se divide numerador y denominador entre n^q :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + \ \dots\ + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \ \dots\ + b_1 n + b_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_p\cdot\frac{1}{n^{q-p}} + \ \dots\ + a_1\cdot\frac{1}{n^{q-1}} + a_0\cdot\frac{1}{n^q}}{b_q + b_{q-1}\cdot\frac{1}{n} + \ \dots\ + b_1\cdot\frac{1}{n^{q-1}} + b_0\cdot\frac{1}{n^q}}$$

• Análogamente a los casos anteriores,

$$\lim_{n\to\infty} a_p\cdot\frac{1}{n^{q-p}} = \lim_{n\to\infty} a_{p-1}\cdot\frac{1}{n^{q-p+1}} = \ \dots\ = \lim_{n\to\infty} a_1\cdot\frac{1}{n^{q-1}} = \lim_{n\to\infty} a_0\cdot\frac{1}{n^q} = 0,$$

por lo que el límite del numerador es cero.

• Se observa, como en los casos anteriores, que el límite del denominador es b_p .

• Aplicando la propiedad del límite de un cociente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + \ \dots\ + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \ \dots\ + b_1 n + b_0} = \frac{0}{b_q} = 0$$

Si *P* y *Q* son dos polinomios de la forma descrita y tales que *grado P = p* y *grado Q = q*, entonces:

Si $p > q$,
$$\lim \frac{P}{Q} = \pm\infty$$

Si $p = q$,
$$\lim \frac{P}{Q} = \frac{a_p}{b_q}$$

Si $p < q$,
$$\lim \frac{P}{Q} = 0$$

Ejemplo: cálculo de límites

① Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - n^3 + 5n - 7}{7n^2 - n - 1}$

Resolución:

El grado del numerador, 3, es mayor que el del denominador, que es 2. Como el coeficiente de n^3 es -1 < 0,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n^3 + 5n - 7}{7n^2 - n - 1} = -\infty$$

② Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(n-5)(n-3)}{3n^2 + n - 1044}$

Resolución:

Operando en el numerador, $2(n - 5)(n - 3) = 2n^2 - 16n + 30$, se observa que el grado del numerador es igual al del denominador, esto es, 2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 16n + 30}{3n^2 + n - 1\,044} = \frac{2}{3}$$

③ Encontrar el límite, cuando n tiende a infinito, de $\dfrac{(n^{17} - 1)(n^{17} + 1)}{(n^{34} - 7)n}$

Resolución:

- Haciendo uso de que una suma por una diferencia es igual a la diferencia de cuadrados, $(n^{17} - 1)(n^{17} + 1) = (n^{17})^2 - 1^2 = n^{34} - 1$

- Aplicando la propiedad distributiva del producto en el denominador,

$$(n^{34} - 7)n = n^{35} - 7n$$

- Así, el grado del numerador es menor que el del denominador; consecuentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^{17} - 1)(n^{17} + 1)}{(n^{34} - 7)n} = 0$$

④ Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Resolución:

● Se puede observar que

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\ldots\,2\cdot 1}{n\cdot n\cdot n\cdot n\,\ldots\,n} < \frac{n\cdot n\cdot n\,\ldots\,n\cdot 1}{n\cdot n\cdot n\,\ldots\,n\cdot n} = \frac{1}{n}$$

ya que cada factor del numerador, excepto el primero y el último, han sido sustituidos por números mayores: $n - 1 < n$; $n - 2 < n$; ... ; $2 < n$.

●Por lo tanto, $0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$

●Puesto que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, se concluye

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

CÁLCULO DE LÍMITES (II)

Otras propiedades para el cálculo de límites

1. Si una sucesión (a_n), cuyos términos son todos positivos, tiene límite $a \neq 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \log\, a_n = \log\, a$$

2. Si p es un número positivo y (a_n) es una sucesión que tiene por límite a, entonces

$$\lim_{n\to\infty} p^{a_n} = p^a$$

3. Si (a_n) es una sucesión de términos positivos que converge a un número a también positivo, entonces, para cualquier exponente s

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^s = a^s$$

4. Si (a_n) es una sucesión de términos positivos convergente a un número a, mayor que cero, y (b_n) es otra sucesión convergente a b, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$$

Ejercicio: cálculo de límites

① Calcular $\lim_{n\to\infty} \ln \frac{3n^5 - 2n^2 + 3}{n^5 + n^4 - n - 4}$

Resolución:

● Por ser un cociente de polinomios en el que los grados del numerador y denominador son iguales,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^5 - 2n^2 + 3}{n^5 + n^4 - n - 4} = \frac{3}{1} = 3$$

● Se concluye que $\lim_{n\to\infty} \ln \frac{3n^5 - 2n^2 + 3}{n^5 + n^4 - n - 4} = \ln 3$

② Calcular $\lim_{n\to\infty} 5^{\sqrt[n]{7}}$

Resolución:

● Si se observa que $\sqrt[n]{7} = 7^{1/n}$, puesto que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} 7^{1/n} = 7^0 = 1$

● Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} 5^{\sqrt[n]{7}} = 5^1 = 5$

③ Encontrar $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2 - 1} \right)^{\frac{n-5}{3n+7}}$

Resolución:

● Tanto la base como el exponente son casos de límites de cocientes de polinomios que tienen el mismo grado. El límite de la base es 2, y el del exponente $\frac{1}{3}$.

● Por la última propiedad vista, el límite que se pide vale $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

<u>Cálculo de límites con sucesiones divergentes</u>

Al aplicar las propiedades de cálculo de límites a sucesiones divergentes hay que tomar ciertas precauciones. Por ejemplo, ¿cuál es el límite de una suma de dos sucesiones, una de las cuales diverge a $+\infty$ y la otra converge a un número cualquiera? Según la propiedad del límite de una suma de sucesiones, dicho límite habría de ser ($+\infty + a$), siendo *a* el límite de la sucesión convergente. Ahora bien, ¿qué significa la suma ($+\infty + a$)? Intuitivamente significa que se está sumando una cantidad infinitamente grande a un número; desde luego la cantidad resultante ha de ser infinitamente grande. Esto puede simbolizarse escribiendo

$$(+\infty) + a = +\infty$$

lo cual induce a pensar que la suma de una sucesión divergente y otra convergente, necesariamente es divergente.

Análogamente, si un número menor que 1 se multiplica consigo mismo, cada vez que se hace uno de estos productos, el resultado va haciéndose menor.

En efecto, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, etc.

Si este proceso se repite hasta el infinito, no parece descabellado pensar que si una sucesión (a_n) converge a un número positivo y menor que 1 y otra sucesión (b_n) tiende a $+\infty$, el límite de $a_n^{b_n}$ sea cero.

Este hecho puede simbolizarse por $a^{+\infty} = 0$, siendo $0 < a < 1$.

Utilizando este simbolismo se tienen los siguientes resultados:

Ejemplo: cálculo de límites

① Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3n+1}{4n^2-5}\right)^{\frac{-3n^5+7}{n-3}}$

Resolución:

- La base es un cociente de dos polinomios del mismo grado, por tanto su límite es $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

- El exponente es también un cociente de dos polinomios en los que el grado del denominador es menor que el del numerador; y por ser el coeficiente de n^5 negativo, el límite es $-\infty$.

- Así, el límite es de la forma $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = +\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3n+1}{4n^2-5}\right)^{\frac{-3n^5+7}{n-3}} = +\infty$$

② Hallar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-n-5}{n-7}\cdot\frac{-5n^3+n}{n^3+2n}\right)$

Resolución:

● Es el límite de un producto. El primer factor es un cociente de dos polinomios siendo el grado del numerador mayor que el del denominador, y al ser el coeficiente de mayor grado del numerador 3, positivo, el límite es $+\infty$.

● El segundo factor es otro cociente de polinomios, esta vez del mismo grado. Su límite es $\frac{-5}{1} = -5$.

El límite que se pide es de la forma $(+\infty)\cdot(-5) = -\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2 - n - 5}{n - 7}\cdot\frac{-5n^3 + n}{n^3 + 2n}\right) = -\infty$$

Límites indeterminados

Se llaman *límites indeterminados* a los que presentan alguna de estas formas:

$$\infty - \infty\ ;\ 0\cdot\infty\ ;\ \frac{0}{0}\ ;\ \frac{\infty}{\infty}\ ;\ \infty^0\ ;\ 0^0\ \text{ó}\ 1^\infty$$

Contra lo que se pudiera pensar, un límite de la forma $\infty - \infty$ no da, en general, como resultado cero, tampoco un límite de la forma 1^∞ da siempre como resultado uno. Por esta razón se les llama límites indeterminados y se requiere hacer un estudio particular para cada caso.

Obsérvese que ya se han estudiado varios casos de indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ al tratar los límites de cocientes de polinomios y el resultado variaba de $-\infty$ a $+\infty$ pasando por todos los valores intermedios.

Ejemplo: cálculo de límites

---

① Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Resolución:

●Este límite es de la forma $\infty - \infty$. Indeterminado.

Este límite se resuelve multiplicando y dividiendo por el conjugado, es decir, por $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. (El conjugado de a + b es a - b.)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

● Por tanto el límite se reduce a calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

② Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\cdot\frac{2n^3+1}{n-5}\right)$.

Resolución:

● El primer factor tiene por límite cero ya que el grado del numerador es menor que el del denominador.

● El segundo factor tiene por límite ∞ pues el grado del numerador es mayor que el del denominador.

● El límite es por tanto de la forma 0·∞ . Indeterminado.

● Multiplicando las dos fracciones:
$$\frac{1}{n^2+1}\cdot\frac{2n^3+1}{n-5} = \frac{2n^3+1}{n^3-5n^2+n-5}$$

● Al ser un cociente de polinomios de igual grado,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+1}{n^3-5n^2+n-5} = \frac{2}{1} = 2$$

③ Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}$.

Resolución:

● $\sqrt{n}\to\infty$ pues $\sqrt{n}$ se hace tan grande como se desee.

● $n\to\infty$ por la misma razón. El límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Indeterminado.

● Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{n}$:

$$\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}} = \frac{n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

● Puesto que $\sqrt{n}\to\infty$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$

④ Calcular $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+3n-2}}$.

Resolución:

- El límite es de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminado.

- Se saca factor común n^2 en la expresión $n^2 + 3n - 2$:

$$n^2+3n-2 = n^2\left(1+\frac{3n}{n^2}-\frac{2}{n^2}\right) = n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)$$

- $\sqrt{n^2+3n-2} = \sqrt{n^2\left(1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)} = n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}}$

- Así, $\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+3n-2}} = \dfrac{2n}{n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}}}$

- Como $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}=0$ y $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}=0$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}} = \sqrt{1} = 1$

- Finalmente, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+3n-2}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}}} = \dfrac{2}{1} = 2$

EL NÚMERO E

El límite de la sucesión $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, cuando $n \to \infty$ es:

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 1^{\infty}$, indeterminado.

Sin embargo, se demuestra que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

El número *e* puede expresarse también así:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + $$
$$+ \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Con la ayuda de una calculadora se pueden calcular algunos términos de esta sucesión:

$a_1 = (1+1)^1 = 2$

$a_{100} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}7048138$

$a_{1\,000} = \left(1+\frac{1}{1\,000}\right)^{1\,000} = 2{,}7169239$

$a_{1\,000\,000} = \left(1+\frac{1}{1\,000\,000}\right)^{1\,000\,000} = 2{,}7182805$

El límite de esta sucesión es el número irracional *e* = 2,7182818... (No será demostrado por su dificultad.)

Este resultado tiene gran importancia, ya que el número *e* aparecerá, en general, en los límites de la forma 1^∞ .

Propiedad para calcular límites de la forma 1^∞

Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim_{n\to\infty} b_n(a_n - 1) = c$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^c$$

Ejercicio: cálculo de límites de la forma 1^∞

① Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$

Resolución:

● Este límite es de la forma 1^∞ . (Se resolverá sin aplicar la propiedad.)

● Dividiendo *n* + 1 entre *n* - 1,

$$\begin{array}{r|l} n+1 & n-1 \\ \cline{2-2} -n+1 & 1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

- Hay que recordar que en una división $D = d \cdot c + r \Rightarrow \frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$

Por lo tanto, $\frac{n+1}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1}$

- Se hace el cambio $\frac{2}{n-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow n-1 = 2x \Rightarrow n = 2x+1$

Está claro que si $n \to \infty$, $x \to \infty$

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+1}$

- Por las propiedades de las potencias,

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^2 \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$

- Pero $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, luego $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2 = e^2$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$

- Se tiene, por consiguiente, que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = e^2 \cdot 1 = e^2$

② Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{2n+5}\right)^{\frac{n^2+1}{n-1}}$

Resolución:

- Es un límite de la forma 1^∞ pues $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{2n+5} = \frac{2}{2} = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n-1} = \infty$

Se resolverá aplicando la propiedad.

- Si $a_n = \frac{2n-3}{2n+5}$ y $b_n = \frac{n^2+1}{n-1}$

$$b_n(a_n - 1) = \frac{n^2+1}{n-1}\left(\frac{2n-3}{2n+5} - 1\right) = \frac{-8n^2-8}{2n^2+3n-5}$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n(a_n-1) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-8n^2-8}{2n^2+3n-5} = -\frac{8}{2} = -4$

● Aplicando la propiedad,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{2n+5}\right)^{\frac{n^2+1}{n-1}} = \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$$

③ Hallar $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n+1}$

Resolución:

●Este límite es de la forma 1^{∞}. (No se aplicará la propiedad)

● Se divide $n + 4$ entre $n + 3$:

$$\begin{array}{r|l} n+4 & n+3 \\ \cline{2-2} -n-3 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\frac{n+4}{n+3} = 1 + \frac{1}{n+3}$$

●Se hace la identificación $\frac{1}{n+3} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = n+3 \Rightarrow n+1 = x-2$

Cuando $n \to \infty$, $x \to \infty$

● $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+1} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}} = \frac{e}{1^2} = e$$

④ Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n}{n^2-1}\right)^{5n-1}$

Resolución:

●Límite de la forma 1^{∞}.

- Se llama $a_n = \dfrac{n^2+3n}{n^2-1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{n^2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

- Si $b_n = 5n-1$, $b_n(a_n-1) = (5n-1)\left(\dfrac{n^2+3n}{n^2-1} - 1\right) =$

$$= (5n-1)\left(\frac{n^2+3n-n^2+1}{n^2-1}\right) = \frac{15n^2+2n-1}{n^2-1}$$

- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{15n^2+2n-1}{n^2-1} = \frac{15}{1} = 15$

- Por tanto, $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n}{n^2-1}\right)^{5n-1} = \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)} = e^{15}$
