

ECUACIONES IMPLICITAS

A.-DOS PLANOS

$$\Pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$$

$$\Pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$$

Ambas ecuaciones forman un sistema que podemos analizar a partir del Teorema de Rouché.

$$\left(\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{array} \right)$$

a) $h=h'=2 < n$ Sistema compatible indeterminado , infinitas soluciones , existen infinitos puntos en común luego los **planos se cortan en una recta.**

b) $h=1 \quad h'=2$ Sistema incompatible. No tiene solución. No hay puntos en común. Los **planos son paralelos.**

$$\text{Condición de paralelismo} \rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

c) $h=h'=1 < n$ Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones. **Planos coincidentes.**

B.-TRES PLANOS

$$\Pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$$

$$\Pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$$

$$\Pi'' \equiv A''x+B''y+C''z+D''=0$$

$$\left(\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{array} \right)$$

a) $h=h'=3 = n$ Sistema compatible determinado. Única solución. **Se cortan en un punto.**

b) $h=2 \quad h'=3$ Sistema incompatible. No tiene puntos en común. **Los planos se cortan 2 a 2 formando un prisma triangular, o bien 2 son paralelos y el tercero les corta.**

c) $h=h'=2 < n$ Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones . Luego **se cortan en una recta.**

d) $h=1 \quad h'=2$ Sistema incompatible. No tiene solución. Los tres planos son **paralelos.**

e) $h=h'=1 < n$ Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones. Los planos **son coincidentes.**

MATEMATICAS

C.-RECTA Y PLANO

$$\Pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$$

$$\Gamma \equiv \begin{cases} A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

- a) $h=h'=3=n$ Sistema compatible determinado. Solución única. Se **cortan en un punto.**
b) $h=2 \quad h'=3$ Sistema incompatible. No tiene solución. Luego la **recta es perpendicular al plano.**
c) $h=h'=2 < n$ Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones. La **recta esta contenida en el plano.**

D.-DOS RECTAS

$$\Gamma \equiv \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

$$\Gamma \equiv \begin{cases} A''x+B''y+C''z+D''=0 \\ A'''x+B'''y+C'''z+D'''=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

- a) $h=3 \quad h'=4$ Sistema incompatible. No hay solución. Las rectas **se cruzan.**
b) $h=h'=3=n$ Sistema compatible determinado. Solución unica. Un solo punto en común. **Se cortan.**

MATEMATICAS

c) $h=2$ $h'=3$ Sistema incompatible. No hay puntos en común. Estan en el mismo plano. Luego **son paralelas**.

d) $h=h'=2 < n$ Sistema compatible indeterminado. Infinitos puntos en comun. Las rectas son **coincidentes**.

ECUACIONES VECTORIALES

A.-DOS PLANOS:

$$\Pi \equiv \vec{X} = a + \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$$

$$\Pi \equiv \vec{X}' = a' + \alpha' \vec{v}' + \beta' \vec{w}'$$

Formamos la matriz con los cuatro vectores directores y analizamos el rango.

$$\begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \\ V'_1 & V'_2 & V'_3 \\ W'_1 & W'_2 & W'_3 \end{pmatrix}$$

a) $r[v, w, v', w'] = 3$ Los planos se cortan en una recta.

b) $r[v, w, v', w'] = 2$

b.1) $r[a - a_1, v, w] = 3$ Los planos son paralelos.

b.2) $r[a - a_1, v, w] = 2$ Los planos son coincidentes.

B.-RECTA Y PLANO

$$\Pi \equiv \vec{X} = a + \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$$

$$r \equiv \vec{x} = a' + \lambda \vec{u}$$

a) $r[u, v, w] = 3$ Se cortan

b) $r[u, v, w] = 2$

b.1) $r[a - a_1, v, w] = 3$ La recta y el plano son paralelos.

b.2) $r[a - a_1, v, w] = 2$ La recta esta incluida en el plano.

C.-DOS RECTAS

$$r \equiv \vec{x} = a + \lambda \vec{u}$$

$$r \equiv \vec{x} = a' + \lambda' \vec{u}'$$

a) $r[u, u'] = 2$ Tienen dos posibilidades (cortarse o cruzarse)

a.1) $r[a - a', u, u'] = 3$ Se cruzan.

MATEMATICAS

a.2) $r[a-a',u,u'] = 2$ Se cortan.

b) $r[u,u'] = 1$ Otras 2 posibilidades.

b.1) $r[a-a',u] = 2$ Las rectas son paralelas.

b.2) $r[a-a',u] = 1$ Las rectas son coincidentes.

ÁNGULOS

A.-FORMADO POR DOS RECTAS

$$r \equiv \vec{x} = a + \lambda \vec{u}$$

$$r' \equiv \vec{x} = a' + \lambda' \vec{u}'$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}'}{|\vec{u}| |\vec{u}'|}$$

B.-FORMADO POR DOS PLANOS

$$\Pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\Pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{|\vec{v}| |\vec{v}'|} = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

C.-ANGULO ENTRE RECTA Y PLANO

$$r \equiv \vec{x} = a + \lambda \vec{u}$$

$$\Pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

DISTANCIAS

A.-ENTRE DOS PUNTOS

$$d(AB) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

B.-ENTRE UN PUNTO Y UN PLANO

MATEMATICAS

$$d(P, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

C.-ENTRE DOS PLANOS

$$d(\Pi, \Pi') = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

D.-DE UN PUNTO A UNA RECTA

$$d(P, r) = \frac{|AP \wedge \vec{u}|}{|u|}$$

E ENTRE DOS RECTAS

$$d(r, r') = \frac{|[AA', u, u']|}{|u \wedge u'|}$$