

PROBABILIDAD

Fenómenos y experimentos aleatorios

Dos jugadores apuestan su dinero lanzando un dado sin trucar con las caras numeradas del uno al seis. Indica las apuestas que te parecen justas:

- 1) A y B apuestan 650 ptas. Gana A si sale par y gana B si sale impar.
- 2) A apuesta 1000 y B 1500. Gana A si sale 1, 2 ó 3 y gana B si sale 4, 5 ó 6.
- 3) A apuesta 1000 ptas y B otras 1000. Gana A si sale 1 ó 2 y gana B en otro caso.
- 4) A apuesta 1000 ptas y B 2000. Gana A si sale 1 ó 2 y gana B en caso contrario.

Observaréis que el juego es justo si la proporción de éxito coincide con la proporción de lo apostado: en las apuestas anteriores lo son los casos 1 y 4.

- ¿Qué debería haber apostado B, en el caso 4, si A hubiera apostado 5000 ptas?
- ¿Y si A hubiera apostado una cantidad de "a" ptas?

Un experimento o un fenómeno se dice aleatorio cuando sea imposible saber de antemano el resultado del mismo. En otro caso se dirá que es determinista.

Son experimentos aleatorios:

El lanzamiento de un dado.

El resultado de un partido de fútbol.

El resultado del sorteo de la O.N.C.E.

La predicción del tiempo.

Son deterministas:

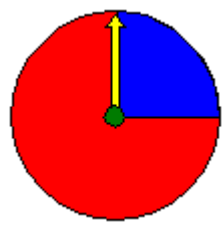
El resultado de tener agua durante dos horas a veinte grados bajo cero.

El resultado de una reacción química.

El próximo avistamiento del cometa Halley.

El diccionario define la palabra probabilidad como apariencia fundada de verdad. Por otro lado dice que lo probable es lo que se funda en razón prudente o lo que se puede probar o persuadir, y añade: dicese de aquello que hay buenas razones para creer que se verificará o sucederá.

- Consulta el significado de las palabras azar y aleatorio.



Suele haber cierta confusión entre los términos posible y probable. Cuando puede darse un fenómeno, decimos que éste es posible: es posible que a tu profesor de Matemáticas lo parta un rayo; lo anterior, que nadie desea que ocurra, es afortunadamente poco probable. En la práctica, los fenómenos poco probables los damos por imposibles.

Es la aleatoriedad de tantos fenómenos lo que confiere ese carácter imprevisible a nuestras vidas; sin la presencia del azar nuestro destino se regiría en base a un sistema de leyes exactas.

No obstante, siempre podremos tener alguna medida de la imprevisión de determinados fenómenos: sabemos que, en condiciones normales, aunque sea posible, lo más probable es que no tengamos un accidente en un viaje; o que si le hacemos un seguro a una casa, lo más fácil es que no se incendie a los dos meses, suponiendo una pérdida para la compañía.

Midiendo probabilidades

Interpretaremos, de manera intuitiva, la probabilidad de un suceso como el grado de creencia en que éste ocurra cuando se realiza el experimento aleatorio.

Ante el lanzamiento de una dado sin defecto aparente, nuestra creencia en que salga par o impar es la misma:

Podremos decir que la probabilidad de obtener par es igual a la probabilidad de obtener impar.

- Indica que sucesos son, a tu juicio, más probables:

Elegimos por sorteo a una persona de la clase:

A="Le gusta el Baloncesto"

B="Le gusta el Fútbol"

Sacamos a ciegas una carta de la baraja:

A="La carta es un rey"

B="La carta es un tres"

C="La carta es de oros"

Considera los siguientes experimentos y observa los sucesos que se indican

E1.- Se tira la ruleta y se observa si cae en zona roja o azul.

E2.- Se lanza una moneda y se observa si sale cara o cruz.

E3.- Se lanza un dado con cuatro caras rojas y dos azules, observando el color de la cara superior.

La gente emplea varias maneras de expresar su grado de creencia en los resultados:

Existe un 75% de probabilidades de que la ruleta se pare en rojo y un 25% de que se pare en azul.



Es igual de presumible que salga cara o cruz.

Hay el doble de probabilidades de que el dado salga rojo a que salga azul.

En este tema vamos a comenzar por unificar todas estas expresiones viendo como asignar un número a nuestro grado de creencia en la ocurrencia de un suceso:

Una criterio razonable sería utilizar siempre el tanto por ciento pero, por motivos que aún no veremos, dividiremos por cien utilizando el tanto por uno.

Concretando:

Expresaremos la probabilidad de un suceso como la proporción, o el tanto por uno, de sus expectativas de ocurrencia.

En consecuencia, hablaremos en los siguientes términos:

E1. $P(\text{Rojo}) = 0'75$, $P(\text{Azul}) = 0'25$

E2. $P(\text{Cara}) = P(\text{Cruz}) = 0'5$

E3. $P(\text{Rojo}) = 0'6$, $P(\text{Azul}) = 0'3$

En otras situaciones no es posible asignar un número de manera tan precisa: es habitual en el razonamiento humano tener una cierta medida, no exacta, de la incertidumbre de determinados sucesos: Si se nos pregunta por la probabilidad de localizar a un conocido a la hora de comer, se podrían dar varios tipos de respuestas:

Seguro que lo encuentras.

Es muy probable que lo encuentres.

Lo mismo está que no está.

Es difícil que coma en casa.

Nunca come en casa.

Nuestra experiencia nos inducirá a contestar de un modo u otro.

- ¿Entre qué valores situarías la probabilidad de los siguientes sucesos?:

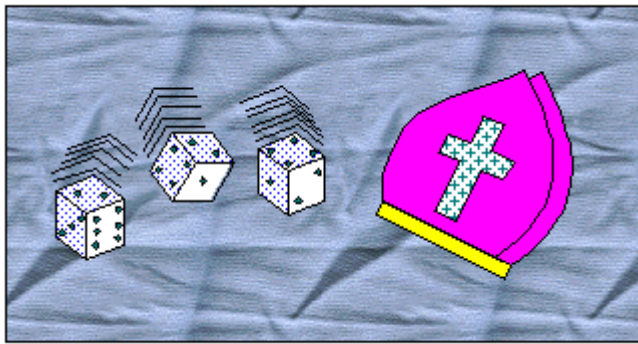
El padre de Juan come *a menudo* en casa.

La tía de Julia come *de vez en cuando* en casa.

Compara tus resultados con los de tus compañeros y observa la imprecisión del lenguaje ordinario.

Problemas resueltos de ruletas:

- Sabemos que la ruleta se para en rojo el 35% de las veces.



- a) Calcula la probabilidad de que se pare en dicho color.
- b) Calcula la amplitud de dicho sector.

Solución:

a) Conocemos, en tanto por ciento, las expectativas que tiene la ruleta de pararse en el sector rojo. Para pasar del tanto por ciento al tanto por uno, sólo hay que dividir por cien: La probabilidad de pararse en rojo es de 0.35

b) Como la amplitud de un sector es directamente proporcional a la probabilidad de que la ruleta se pare en él, tenemos:

| Amplitud | Probabilidad |
|----------|--------------|
| 180° | → 0'5 |
| X | → 0'35 |

$$x = \frac{180 \cdot 0'35}{0'5} :$$

El sector rojo es de 126°.

- En una ruleta hay tres sectores: rojo, verde y azul. La probabilidad de que se pare en rojo es de 0.35; la amplitud del sector azul es de 45°. ¿Qué probabilidad tiene de pararse en azul?.

Solución:

Las expectativas de pararse en rojo son del 35%. El sector azul tiene 45°, procediendo como en el ejemplo anterior hallamos las suyas, que son del 12'5%. En consecuencia las de pararse en verde serán del 52'5%:

$$P(\text{Verde}) = 0'525.$$

Un poco de historia

El juego ha sido una actividad humana desde tiempos remotos. A pesar de las tragedias que ha causado y de la oposición al mismo desde ámbitos legales y religiosos, se siguen jugando grandes cantidades de dinero.

Cabe reseñar el intento del obispo Wilbold de Cambray (siglo X) de conciliar religiosidad y azar cuando propuso el siguiente juego: se lanzaban tres dados y a cada manera de sumar sus puntos se asignaba a una virtud por él enumerada, tal virtud debía observarse durante un tiempo determinado.

Orígenes de algunos juegos.

- * Taba: cuarto milenio antes de Cristo, en Oriente Medio.
- * Backgammond: tercer milenio antes de Cristo, en Oriente Medio. La versión moderna se juega en el siglo XVIII en Inglaterra.
- * Dado: sobre el segundo milenio antes de Cristo, en Egipto.

- * Lotería: en el siglo I, en Roma.
- * Naipes: en el siglo X, en China.
- * Ruleta Francesa: sobre el 1800, en Francia.
- * Póker: sobre 1800, en Lousiana.
- * Bingo: sobre 1800, en Inglaterra.

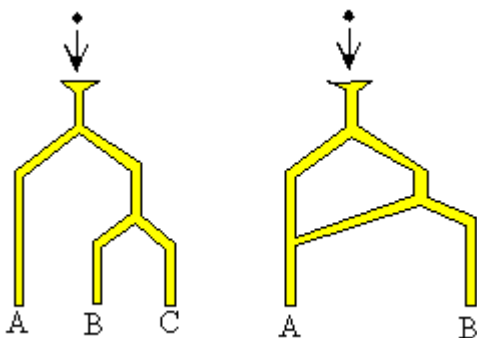
Es precisamente el juego el causante de esta teoría que, en Occidente, surge alrededor de 1600.

Se atribuye a Pascal su primera consideración y las primeras aplicaciones a diversos juegos. Hay que decir que en la India, con un sistema mercantil y de numeración avanzados y una religión que no seguía el modelo determinista, es posible encontrar textos antiguos con relatos acerca de juegos donde se hace uso de las probabilidades.

La aplicación posterior de la teoría a campos como seguros y anualidades (s.XVI), astronomía (s.XVII), biología (s.XIX), y la amplia gama de aplicaciones actuales (medicina, informática, física, agricultura, ...) le han conferido a la probabilidad una enorme importancia.

Actividades

- Establece la probabilidad de que la bola caiga por los respectivos canales. ¿Cuál es, en el primer caso, la probabilidad de que la bola no salga por el centro?

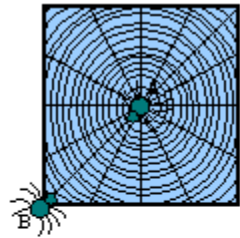


Problemas de ruletas: La probabilidad de un color es directamente proporcional al área que ocupa (o lo que es igual, a la amplitud del sector)

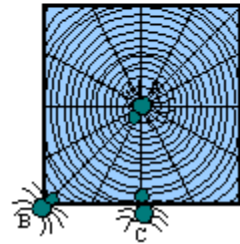
- Una ruleta tiene tres sectores. El blanco de 150° , el azul de 60° y el rojo. Calcula la probabilidad de que se pare en cada uno de ellos.
- En una ruleta de dos colores, rojo y azul, el sector rojo tiene una amplitud 5 veces mayor que el azul.

¿Cuál es la amplitud de cada sector?

¿Cuál es la probabilidad de que se pare en cada uno de los colores?



Problemas de apuestas: Una apuesta es justa si la cantidad que apuesta cada persona es proporcional a la probabilidad que tiene de ganar.



- Una ruleta tiene tres sectores: el rojo, de 120° , al que apuesta el jugador A; el azul, de 180° , al que apuesta B, y el verde al que juega C. En el caso de que B ponga 1200, ¿cuánto deberán apostar los demás para que el juego sea justo?.
- Tres jugadores tienen 1900, 700 y 2300 pts respectivamente. Si desean jugarse a una sola tirada todo el dinero que tienen, diseña una ruleta en la que la apuesta sea equitativa.

Otras cuestiones:

- En un estudio realizado con el alumnado de un curso se ha comprobado que el 85.4% tiene al menos un hermano; el 55.1% tiene al menos dos; y el 20% tiene tres o más.
- Se elige una persona al azar, hallar si se puede la probabilidad de que:

No tenga hermanos.

Tenga exactamente dos hermanos.

Tenga tres hermanos.

- Si una mosca, atravesando al azar la ventana, queda atrapada por la red, y las dos

arañas son igual de rápidas, ¿cuál es la probabilidad de que sea comida por B?. (Dibuja la mediatriz del segmento AB y establece el área que queda más cerca de B).

¿Cuál sería la posición más ventajosa para B, sabiendo que A no le permite esperar dentro de la red?.

Resuelve la misma cuestión en el caso de que el marco sea un hexágono.

Investiga lo que ocurriría si el marco fuese en forma de triángulo equilátero, A estuviera en el baricentro y B en una de las esquinas.

Calcula la probabilidad de que la mosca sea comida por cada una de las arañas, sabiendo que son igual de rápidas.

- Juan ha conseguido 250 bonos de detergente X y Pedro 1000 bonos. La marca X otorga un premio a quien consigue 1250 bonos y, por esto, deciden jugarse los mismos para que alguien salga beneficiado.

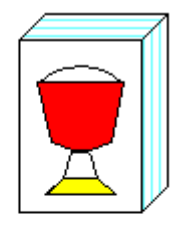
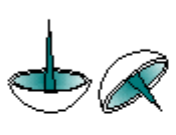
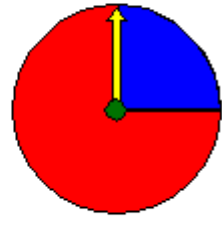
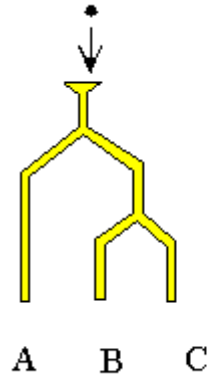
Diseña una ruleta de manera que el juego sea equitativo.

Si disponen de un juego de lotería con las bolas numeradas del uno al cien, establece un sorteo equitativo.

Contesta a las preguntas anteriores en el caso de Juan tuviera 1000 bonos y Pedro 500.

- Explica las siguientes propiedades de la probabilidad:

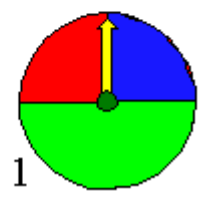
La probabilidad es un número comprendido entre 0 y 1.



La probabilidad de que salga un suceso es igual a la unidad menos la probabilidad

de que no salga.

- A y B y C tienen todas las papeletas de una rifa. A tiene que B y éste las dos quintas que C. Calcula la probabilidad que tiene cada uno de llevarse el premio.



el triple partes

Experimentos Laplacianos

En bastantes experimentos todos los resultados tienen las mismas probabilidades de ocurrir:

Lanzamiento de una moneda.

Lanzamiento de un dado.

Elección de un alumno por sorteo.

En otros, en cambio, los resultados tienen distintas probabilidades:

Lanzamiento de la ruleta: el rojo tiene el triple de probabilidad de ocurrir que el azul.

Caída de la bola por la tubería: A tiene el doble de probabilidad que B y C.

- En los siguientes experimentos, describe los posibles resultados y discute si son equiprobables:

Caída de una caja de fósforos desde una determinada altura.

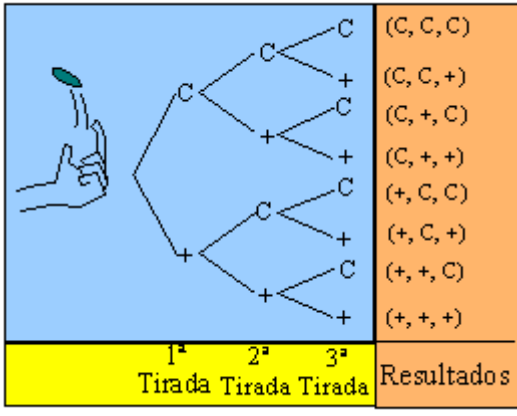
Extracción de una carta de un mazo barajado.

Lanzamiento de una chincheta.

Lanzamiento de la ruleta 1.

Lanzamiento de la ruleta 2.

Jugar a un décimo de lotería.



Extraer una bola de la bolsa, y :

- a) Observar el color.
- b) Observar el número.

Si un experimento aleatorio tiene todos sus resultados con iguales expectativas de ocurrencia, se podrá aplicar la LEY de LAPLACE para

el cálculo de probabilidades:

Probabilidad de un suceso = N° de casos favorables / N° de casos posibles.

Se entienden por casos favorables aquellos resultados que comprende el suceso, y por casos posibles al total de resultados.

De esta manera, al extraer una carta de una baraja española, hay 10 casos favorables, para obtener oro, de un total de 40 posibles, la proporción de éxito o probabilidad será 10/40.

Igualmente :

$Pr(\text{Par}) = 3/6$

$Pr(1,2) = 2/6$

$Pr(\text{Cara}) = 1/2$

$Pr(\text{As}) = 4/40$

$Pr(\text{tocar un décimo de la O.N.C.E.}) = 1/100000$

La probabilidad de obtener una bola par de la bolsa, es de 2/5.

Estrategias

En muchos experimentos en los que se puede aplicar la regla de Laplace, no es fácil contar los resultados de los mismos. Puede ser útil hacer una representación, mediante un diagrama en árbol, de las distintas posibilidades:

Se lanza una moneda 3 veces. Calcular la probabilidad de que salgan 2 caras.

Hay 8 resultados posibles y tres favorables. La probabilidad es 3/8.

- Calcula la probabilidad de que salgan 3 caras.
- ¿Qué es más probable, obtener dos caras u obtener tres?.
- ¿Cuál de los siguientes resultados te parece más probable, (c,c,c) o (c,+,c)?
- ¿Qué es más probable, obtener dos caras u obtener una cruz?
- ¿Sabrías decir cuantos resultados posibles se obtienen al lanzar cuatro monedas?
- ¿Y cinco?
- ¿Y quince?

En otras ocasiones hay que elegir un sistema de representación más adecuado:

Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos esté entre 7 y 9?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Casos favorables: 15. Casos posibles: 36.

La probabilidad es de $15/36$.

Actividades

- En las células humanas hay 46 cromosomas de los que dos de ellos determinan el sexo: cromosomas x e y. Las mujeres tienen 2 cromosomas x y los hombres uno x y otro y.

Los óvulos llevan dos cromosomas x pero la mitad de los espermatozoides llevan x y la otra mitad y. En consecuencia, la probabilidad de tener un hijo es la misma que la de tener una hija.

Un matrimonio desea tener tres hijos. Calcula, utilizando un diagrama en árbol, la probabilidad de que:

Los tres sean varones.

El 1º varón, la 2ª mujer y el 3º varón.

Tener dos varones y una mujer en el orden que sea.

Tener dos hembras y un varón en cualquier orden.

¿Te puede ser útil el diagrama que representaba los lanzamientos de la moneda? ¿Por qué?

- Un matrimonio tiene cinco descendientes. Señala de mayor a menor los casos más probables:

H,H,H,H,H

Tener tres mujeres.

| Número de lanzamientos | Número de caras | Frecuencia relativa (n/N) |
|------------------------|-----------------|-------------------------------|
| 10 | 7 | 0'7 |
| 30 | 14 | 0'46 |
| 60 | 36 | 0'6 |
| 120 | 49 | 0'4083 |
| 180 | 86 | 0'47 |
| 240 | 124 | 0'516 |
| 300 | 154 | 0'513 |

H,M,H,M,H

Tener dos hombres.

Tener un hombre.

• Ana, Álvaro, Teresa y Jaime van al cine. Si ocupan al azar 4 asientos que hay en fila, ¿Cuál es la probabilidad de que Álvaro se sienta junto a su amada Teresa?.

¿Y de que se sienten los dos hombres juntos?

Dibuja un diagrama en árbol con las distintas posiciones. Observa el diagrama en árbol e intenta deducir cuántas posibilidades se tendrían para cinco personas. Intenta expresar las posibilidades para n personas.

- En un mazo hay 8 tarjetas numeradas con los números del 1 al 8. Si se extraen dos tarjetas sin reemplazamiento:

¿Cuál es la probabilidad de que sumen menos de 10?

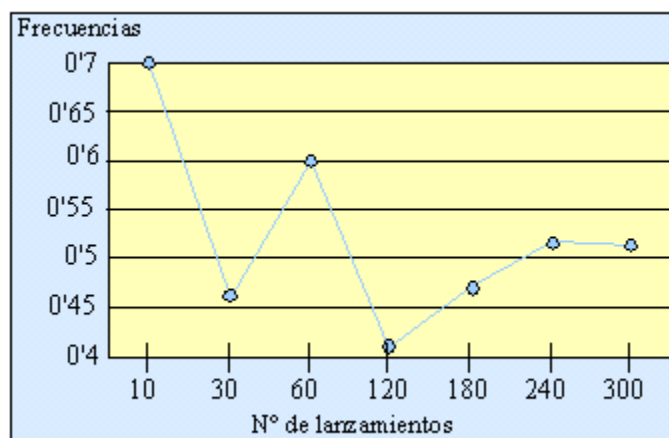
¿Y de la diferencia de puntos sea menor que 4?

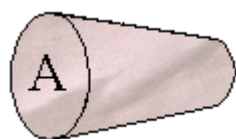
- Contesta las mismas preguntas en el caso de que el mazo tenga tres cartas con el número 4, otras tres numeradas con el 5, y las dos restantes con el 6.
- En una bolsa hay dos bolas blancas y una negra de igual tamaño. Se extrae a ciegas una bola y se anota el color, a continuación se devuelve a la bolsa y se repite la operación.

Escribe en un diagrama de árbol las distintas posibilidades y calcula su probabilidad.

- Realiza la misma actividad en el caso de la bolsa tenga tres blancas y dos negras.

Experiencias repetidas





Anteriormente hemos considerado dos experimentos, el lanzamiento de una caja de fósforos y de una chincheta, en los que no parece fácil establecer la probabilidad de los distintos resultados. En lo que sigue vamos a ver un método que nos permitirá estimar las mismas.

En el lanzamiento de una moneda sin defectos, la probabilidad de obtener cara es 0'5. Decidimos realizar varios lanzamientos con monedas y observar lo que ocurría.

Por curiosidad, y con la ayuda de ordenador, se hizo una simulación de 10000, 100000 y 1000000 lanzamientos de una moneda, obteniéndose los siguientes valores:

| Número de lanzamientos | Número de caras | Frecuencia relativa (n/N) |
|------------------------|-----------------|-------------------------------|
| 10000 | 5050 | 0'505 |
| 100000 | 50127 | 0'50127 |
| 1000000 | 500230 | 0'50023 |

En el experimento comprobamos que, cuando el número de lanzamientos era suficientemente grande, la frecuencia relativa del suceso se acercaba bastante a la probabilidad teórica del mismo.

Actividad

Cada alumno de la clase ha de lanzar 50 veces un dado y anotar el número de ellas que sale 5. Se trata de dividir el total de cincos obtenidos por los alumnos de la clase por el número de lanzamientos realizados. Comprobaréis que la frecuencia relativa obtenida no difiere mucho de la probabilidad ($1/6$) de obtener cinco.

El experimento resultará mejor si se consideran todos los cursos de 3º de E.S.O.

Este hecho nos va a servir para estimar probabilidades de sucesos en experimentos en los que no sea posible intuir a priori una medida de las mismas. También nos servirá para corroborar nuestra intuición de la probabilidad de algunos sucesos:

- Estimar, apuntando los resultados obtenidos por toda la clase, las probabilidades siguientes:

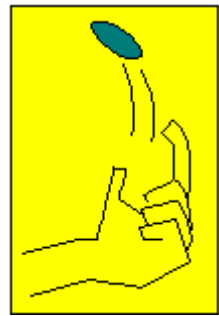
Caer el pincho hacia abajo en el lanzamiento de una chincheta.

(Podéis tirar una caja en cada ocasión y ahorraréis tiempo)

Caer por la superficie mediana, al dejar caer desde una altura de 30 cm una caja de fósforos.

Probabilidad de obtener par en un dado al que se le ha pegado un botón por la cara del dos.

Probabilidad de que un corcho caiga por la parte A.



Observa que, al tratarse de estimaciones, dos personas distintas pueden otorgar probabilidades distintas. No obstante, si ambas han realizado un número suficiente de experimentos, los valores asignados diferirán en una cantidad despreciable.

Este método frecuentista es el que utilizamos en la vida diaria para tomar decisiones:

Un médico con experiencia puede estimar con bastante precisión la probabilidad de que, bajo determinados síntomas, una persona padezca cierta enfermedad, o que determinada operación tenga tantas probabilidades de éxito.

Lo anterior se basa en el conocimiento que aporta el estudio, en la lógica y en la repetida observación de un fenómeno en circunstancias muy similares.

Indica otra situación parecida a la anterior

Actividades

- Al lanzarse una moneda perfecta un determinado número de veces, siempre salió cara cara.

Discute cuál de los casos siguientes te parece más verosímil:

La moneda se lanzó 2 veces.

La moneda se lanzó 4 veces.

No importa el número de veces.

- Contesta a la cuestión anterior en el supuesto de hubiera salido cara el 50% de las veces.
- Cada alumno de la clase ha de repetir veinte veces el siguiente experimento: lanzar sucesivamente una moneda hasta que obtenga cara y anotar el número de lanzamientos que requirió para conseguirla. Tras anotarse en una tabla los resultados obtenidos por todo el grupo, se han de discutir las siguientes cuestiones:

¿En qué lanzamiento es más probable obtener cara?

¿Qué es más probable, obtener cara antes de la segunda tirada o después de ésta?

¿Qué es más probable, obtener cara antes de la tercera tirada o después de ésta?

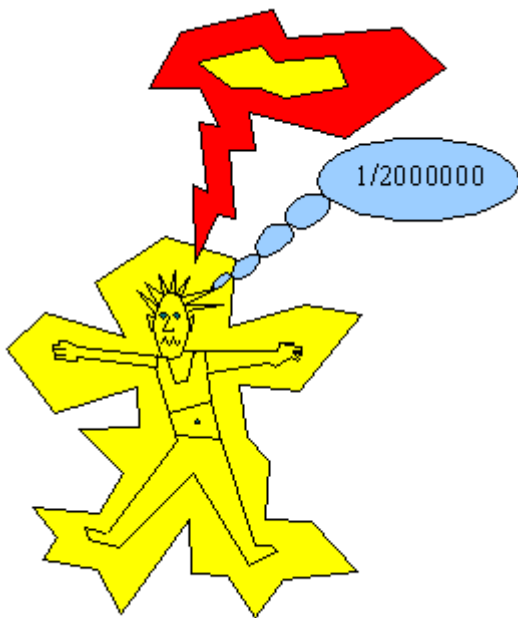
Si por cada tirada, hasta que sale cara, se pagan 100 ptas y, cuando sale se reciben 250 ptas. ¿Es ventajosa la apuesta para el lanzador?

- Una moneda perfecta se ha lanzado 15 veces obteniéndose cruz en todas las tiradas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en la decimosexta tirada? :

Menos que la de obtener cruz.

Más que la obtener cruz.

La misma.



¿Te parece que lo anterior puede ocurrir a menudo?

- De una bolsa con diez bolas se realizaron 100 extracciones a ciegas, devolviendo en cada caso la bola a la bolsa. De las cien veces se obtuvo bola roja en 35 ocasiones y bola negra en el resto. Indica qué situación te parece más probable:

La bolsa contiene 2 bolas blancas y 8 negras.

Contiene 3 blancas y 7 negras.

Contiene 4 blancas y 6 negras.

Contiene 6 blancas y 3 negras.

¿Es seguro que se da alguna de las situaciones anteriores?

¿Puede contener la bolsa bolas de otro color?

- Un señor juega siempre los cinco primeros días de la semana al sorteo de la O.N.C.E., aproximadamente unos 260 días al año. Discute cuál es el número más probable de veces que le podría tocar el premio si jugase durante 800 años.

RESUMEN

Hay varias maneras de asignar probabilidad a un suceso de un experimento aleatorio. La forma natural de proceder es la siguiente:

Reconocer los posibles resultados.

Establecer si son o no equiprobables.

Si estamos seguros de que son equiprobables, aplicamos la Ley de Laplace.

Si no lo son, intentamos establecer la proporción de éxito de dicho suceso.

Si lo anterior no es posible, repetimos el experimento sucesivas veces, en igualdad de condiciones, para estimar la probabilidad buscada.

Una cuestión de probabilidades

El diario IDEAL de Granada publicaba, en el verano de 1995, la noticia de que tres personas perecieron en un tormenta al ser alcanzados por un rayo. Al parecer se refugiaron bajo un árbol desconociendo que de esta forma aumentaba el peligro.

Abajo tienes una serie de estadísticas curiosas:

(Fuente: Org. Nac. de apuestas y loterías del Estado)

* Ser alcanzado por un rayo.

1 entre 2000000.

* Encontrar una perla en una ostra.

1 entre 12000.

* Tener cuatrillizos.

1 entre 705000.

* Ganar el premio de la lotería primitiva.

1 entre 13983816

¿Quiere decir lo anterior que la probabilidad de que le caiga un rayo a tu profesor es de $1/2000000$?

¿Cómo se debe interpretar esa probabilidad?

Escribe un comentario sobre las probabilidades anteriores