

Condición para que 3 puntos estén alineados.

$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$ Estarán alineados cuando los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BC} tengan la misma dirección, esto ocurre cuando son proporcionales.

$$\frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B}$$

Punto medio de un segmento.

Punto medio = M Extremos = $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Ecuaciones de la recta.

Ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OX} = \vec{p} + k\vec{v}$$

O es el origen

X es un punto de la recta

\vec{p} es un vector posición que nos sitúa sobre la recta

\vec{v} es el vector dirección (paralelo a la recta)

k es un parámetro. Al variar t, varía X sobre la recta.

Ecuaciones paramétricas:

En la ecuación vectorial sustituimos los vectores por sus coordenadas:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + k(v_1, v_2)$$

Y expresamos las variables por separado:

$$\text{Ecuación paramétrica } \begin{cases} x = p_1 + kv_1 \\ y = p_2 + kv_2 \end{cases}$$

Ecuación continua de la recta:

Despejamos k e igualamos:

$$\left. \begin{cases} x = p_1 + kv_1 \\ y = p_2 + kv_2 \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow k \frac{x - p_1}{v_1} \\ \rightarrow k \frac{y - p_2}{v_2} \end{array} \rightarrow \frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

Ecuación implícita o general:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

$$(x - p_1)v_2 = (y - p_2)v_1$$

$$xv_2 - p_1v_2 = yv_1 - p_2v_1$$

$$xv_2 - yv_1 - p_1v_2 + p_2v_1 = 0$$

$$\text{Cambio de variables: } [A = v_2 \quad B = -v_1 \quad C = p_2v_1 - p_1v_2]$$

$A_x + B_y + C = 0$ El vector (A, B) es perpendicular a la recta r

$$\vec{v} \perp \vec{a} \quad \vec{v} \text{ director}$$

Ecuación explícita de la recta r.

$$A_x + B_y + C = 0$$

$$y = \frac{-C - A_x}{B}$$

$$\text{Cambio de variables: } [m = \frac{-A}{B} \quad n = \frac{-C}{B}]$$

$$y = mx + n$$

Pendiente:

$$[m(x_0 + 1) + n] - [mx_0 + n] = mx_0 + m + n - mx_0 - n = m$$

$$\text{tg } \alpha = m$$

Para obtener la pendiente de una r a partir de 2 puntos:

Puntos: $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

$$m = \text{tg } \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Forma punto pendiente de la ecuación de una recta:

Conocemos un punto $P(x_0, y_0)$ y su pendiente m , la ecuación es:

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

Simétrico de un punto respecto de otro.

Punto $A(x, y)$, El punto de simetría $P(\alpha, \beta)$, y el punto a averiguar $A'(x', y')$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{x + x'}{2} \\ \beta &= \frac{y + y'}{2} \end{aligned} \right\}$$

Ángulo entre dos rectas:

Se coge el más pequeño y se obtiene a partir de los \vec{v}_d de las dos rectas.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{d}'|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{d}'|}$$

Paralelismo:

Si (d_1, d_2) es un \vec{v}_d de la recta r y $k \neq 0$,

Cualquier recta con $\vec{v}_d = (d_1, d_2)$ o proporcional (kd_1, kd_2) , es paralela o coincide con r .

Perpendicularidad:

Cualquier recta con $\vec{v}_d = (d_2, -d_1)$ o proporcional $(kd_2, -kd_1)$ es perpendicular a r .

Ángulo de dos rectas a partir de la pendiente:

- Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente $m_1 = m_2$
- Si las rectas son \perp , entonces: $m_1 \cdot m_2 = -1$ o bien: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$
- En general: $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right| \longrightarrow \operatorname{tg} \varphi = |\operatorname{tg}(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \right| = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right|$

Posición relativa de rectas dadas en forma general:

$$r \Rightarrow Ax + By + C = 0 \quad \text{y} \quad s \Rightarrow A'x + B'x + C'x = 0$$

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'x + C'x = 0 \end{cases}$$

- Si tiene solución única, las rectas se cortan. $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$
- Si no tiene solución, las rectas son paralelas. $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
- Si tiene soluciones infinitas son la misma recta. $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

Posición relativa de rectas dadas:

$$\text{Dadas las rectas } r \begin{cases} x = a + bk \\ y = c + dk \end{cases} \quad s \begin{cases} x = a' + b't \\ y = c' + d't \end{cases}$$

Para hallar su posición relativa resolvemos el sistema con 2 incógnitas, k y s :

$$\begin{cases} a + bk = a' + b't \\ c + dk = c' + d't \end{cases} \quad \text{Igualamos las } x \text{ y las } y \text{ de las 2 rectas.}$$

- El sistema tiene solución única (k_0, t_0) , las rectas se cortan en un punto cuyas coordenadas se obtienen sustituyendo en r , k por k_0 , o bien en s , t por t_0 .
- El sistema no tiene solución, las rectas son paralelas.
- El sistema tiene infinitas soluciones, son la misma recta.

Distancias

La distancia entre dos puntos $P(x_P, y_P)$, $q(x_Q, y_Q)$ es el módulo del vector \overrightarrow{PQ} :

$$\text{dist}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

La distancia de un punto $P(a, b)$ a la recta $r: Ax + By + C = 0$ es:

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

TEMA 5:

Producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y \quad \longrightarrow \quad \text{Es un número.} \quad || \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{u, v})$$

$$|| \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot \cos(\widehat{u, v})$$

Módulo de un vector:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \quad \longrightarrow \quad \text{Es un número}$$

Cos del ángulo de 2 vectores:

$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad \longrightarrow \quad \text{Es un número}$$

Combinación lineal (CL):

Vectores \vec{x} e \vec{y}

Escalares a y b

$$\text{Vector CL de } \vec{x} \text{ e } \vec{y} = \boxed{a\vec{x} + b\vec{y}}$$

Coordenadas del vector CL

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (u_x, u_y) \\ \vec{v} = (v_x, v_y) \end{array} \right\} = a\vec{u} + b\vec{v} = (au_x + bv_x, au_y + bv_y)$$